

ОПТИМИЗАЦИЯ РЕСТРИКТИВНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ УПРАВЛЕНИЕМ НА ПРИМЕРЕ ИНЕРЦИОННОГО РЫНКА ОДНОГО ТОВАРА

В.В. Поддубный

Томский государственный университет

E-mail: vpoddubny@gmail.com

О.В. Романович

E-mail: hjkm@ngs.ru

Аннотация

Рассматривается рестриктивная (подчиняющаяся ограничениям типа неравенств) управляемая динамическая система, описываемая в каждый момент дискретного времени t неуправляемой переменной x_t , $x_{\min} \leq x_t \leq x_{\max}$, и управляемой переменной y_t , подчиняющейся рекуррентному соотношению $y_{t+1} = f(y_t, u_{t-\tau}, z_t)$, где $u_{t-\tau} \geq 0$ – запаздывающее на время τ управление, $z_t = f_1(x_t, y_t, u_{t-\tau})$, если $\varphi(x_t, y_t, u_{t-\tau}) > 0$, и $z_t = f_2(x_t, y_t, u_{t-\tau})$, если $\varphi(x_t, y_t, u_{t-\tau}) \leq 0$, причём функции f, f_1, f_2, φ – дифференцируемы, f_1, f_2 – монотонны, φ – строго монотонна по всем аргументам. Найдена структура оптимального управления такой системой по локальному критерию максимума вогнутой по x_t кусочно-дифференцируемой целевой функции $J(x_t, y_t, z_t, u_{t-\tau})$. В качестве примера решена задача математического описания и имитационного моделирования инерционного рынка одного товара при оптимальном управлении поставкой товара на рынок в условиях запаздывания поставок.

1. Постановка задачи

Рассмотрим рестриктивную (подчиняющуюся ограничениям типа неравенств) управляемую динамическую систему, описываемую в каждый момент дискретного времени $t = 0, 1, 2, \dots$ неуправляемой переменной x_t ,

$$x_{\min} \leq x_t \leq x_{\max}, \quad (1)$$

и управляемой переменной $y_t \geq 0$, подчиняющейся рекуррентному соотношению

$$y_{t+1} = f(x_t, y_t, z_t, u_{t-\tau}), \quad (2)$$

где $u_{t-\tau} \geq 0$ – запаздывающее на время $\tau \geq 0$ управление, z_t – рестриктивное отображение вида

$$z_t = \begin{cases} f_1(x_t, y_t, u_{t-\tau}), & \text{если } \varphi(x_t, y_t, u_{t-\tau}) > 0, \\ f_2(x_t, y_t, u_{t-\tau}), & \text{если } \varphi(x_t, y_t, u_{t-\tau}) \leq 0, \end{cases} \quad (3)$$

f – непрерывная функция своих аргументов, f_1, f_2, φ – непрерывные функции своих аргументов, непрерывно дифференцируемые и монотонные по x_t и $u_{t-\tau}$, причём φ – строго монотонна по x_t и $u_{t-\tau}$.

Требуется найти структуру оптимального управления такой системой по локальному критерию максимума вогнутой по аргументам $x_t, z_t, u_{t-\tau}$ и кусочно-дифференцируемой целевой функции

$$J(x_t, y_t, z_t, u_{t-\tau}) \Rightarrow \max_{x_t, u_{t-\tau} \geq 0}, \quad (4)$$

где максимум ищется при ограничениях (1) – (3) и заданных начальных условиях x_0, y_0 в момент времени $t = 0$ и x_t^*, y_t^* на предшествующем интервале $-\tau \leq t < 0$.

Подобные рестриктивные динамические математические модели могут быть использованы при описании некоторых экономических систем (например, рынков [1–3]), биологических систем (например, дыхательных систем [4]) и др.

2. Необходимые условия оптимальности и алгоритм решения задачи

При решении задачи оптимизации рестриктивной динамической системы (1) – (3) по локальному критерию (4) целесообразно выделить для каждого текущего момента t дискретного времени допустимые области U_t возможных значений управляющей переменной $u_{t-\tau}$, соответствующие знакам функции $\varphi(x_t, y_t, u_{t-\tau})$:

- область $U_t^{(1)}$, где $\varphi(x_t, y_t, u_{t-\tau}) > 0$,
- область $U_t^{(2)}$, где $\varphi(x_t, y_t, u_{t-\tau}) < 0$,
- область $U_t^{(3)}$, где $\varphi(x_t, y_t, u_{t-\tau}) = 0$.

Рассмотрим схему решения задачи оптимизации (4) при ограничениях (1) – (3) для каждой из этих областей. В каждой из них переменная z_t подчиняется своей связи с другими переменными в соответствии с записанными выше условиями принадлежности к этой области, и решение задачи оптимизации (4) распадается на два этапа.

На **первом** этапе решается задача оптимизации целевой функции (4) по переменной x_t при фиксированном значении переменной $u_{t-\tau}$ для каждой области. В результате получается условно-оптимальное значение $\tilde{x}_t^{(i)}(y_t, u_{t-\tau})$ переменной x_t для каждой области $U_t^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, и границы возможных (допустимых) значений переменной $u_{t-\tau}$ для каждой области, определяющие эту область.

На **втором** этапе для каждой области $U_t^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, решается задача отыскания оптимального управления $\tilde{u}_{t-\tau}^{(i)}(y_t)$, обеспечивающего максимум условно-оптимальной целевой функции:

$$\tilde{u}_{t-\tau}^{(i)}(y_t) = \arg \max_{u_{t-\tau} \in U_t^{(i)}} J_t^{(i)}(y_t, u_{t-\tau}), \quad i = \overline{1, 3},$$

где

$$J_t^{(i)}(y_t, u_{t-\tau}) = J(\tilde{x}_t^{(i)}(y_t, u_{t-\tau}), y_t, z_t^{(i)}(\tilde{x}_t^{(i)}(y_t, u_{t-\tau}), y_t, u_{t-\tau}), u_{t-\tau}),$$

так что максимальное значение критерия для каждой области даётся выражением:

$$\tilde{J}_t^{(i)}(y_t) = J_t^{(i)}(y_t, \tilde{u}_{t-\tau}^{(i)}(y_t)), \quad i = \overline{1, 3}.$$

Окончательное решение $\tilde{u}_{t-\tau}(y_t)$ задачи даёт сравнение максимальных значений критериев $\{\tilde{J}_t^{(i)}(y_t)\}$ по областям: выбирается $\tilde{u}_{t-\tau}(y_t) = \tilde{u}_{t-\tau}^{(j)}(y_t)$ той области, для которой значение критерия максимально: $j = \arg \max_i \tilde{J}_t^{(i)}(y_t)$.

Рассмотрим эти этапы для каждой из областей более подробно.

1) $U_t^{(1)}$: $\varphi(x_t, y_t, u_{t-\tau}) > 0$.

В этой области $z_t = f_1(x_t, y_t, u_{t-\tau})$, так что целевая функция (4) принимает вид:

$$J(x_t, y_t, f_1(x_t, y_t, u_{t-\tau}), u_{t-\tau}) \Rightarrow \max_{x_t, u_{t-\tau} \geq 0}.$$

В силу вогнутости функции $J(x_t, y_t, z_t, u_{t-\tau})$ и монотонности $f_1(x_t, y_t, u_{t-\tau})$ решение этой задачи существует, в том числе и при фиксированной переменной $u_{t-\tau}$.

На первом этапе, фиксируя $u_{t-\tau}$, находим:

$$\begin{aligned}\bar{x}_t^{(1)}(y_t, u_{t-\tau}) &= \arg \max_{x_t} J(x_t, y_t, f_1(x_t, y_t, u_{t-\tau}), u_{t-\tau}), \\ J_t^{(1)}(y_t, u_{t-\tau}) &= J(\bar{x}_t^{(1)}(y_t, u_{t-\tau}), y_t, f_1(\bar{x}_t^{(1)}(y_t, u_{t-\tau}), y_t, u_{t-\tau}), u_{t-\tau}).\end{aligned}$$

Подставляя $x_t = \bar{x}_t^{(1)}(y_t, u_{t-\tau})$ в $\varphi(x_t, y_t, u_{t-\tau})$, находим условие принадлежности к области $U_t^{(1)}$:

$$U_t^{(1)} = \{u_{t-\tau} : \varphi(\bar{x}_t^{(1)}(y_t, u_{t-\tau}), y_t, u_{t-\tau}) > 0\},$$

откуда находятся границы области $U_t^{(1)}$ для допустимых в этой области управлений $u_{t-\tau}$.

На втором этапе находим:

$$\bar{u}_{t-\tau}^{(1)}(y_t) = \arg \max_{u_{t-\tau} \in U_t^{(1)}} J_t^{(1)}(y_t, u_{t-\tau}).$$

$$2) U_t^{(2)} : \varphi(x_t, y_t, u_{t-\tau}) < 0.$$

Аналогично предыдущему, решаем задачу для этой области, используя теперь другое представление рестриктивной переменной $z_t = f_2(x_t, y_t, u_{t-\tau})$. В результате получаем:

$$\begin{aligned}\bar{x}_t^{(2)}(y_t, u_{t-\tau}) &= \arg \max_{x_t} J(x_t, y_t, f_2(x_t, y_t, u_{t-\tau}), u_{t-\tau}), \\ J_t^{(2)}(y_t, u_{t-\tau}) &= J(\bar{x}_t^{(2)}(y_t, u_{t-\tau}), y_t, f_2(\bar{x}_t^{(2)}(y_t, u_{t-\tau}), y_t, u_{t-\tau}), u_{t-\tau}), \\ U_t^{(2)} &= \{u_{t-\tau} : \varphi(\bar{x}_t^{(2)}(y_t, u_{t-\tau}), y_t, u_{t-\tau}) < 0\}, \\ \bar{u}_{t-\tau}^{(2)}(y_t) &= \arg \max_{u_{t-\tau} \in U_t^{(2)}} J_t^{(2)}(y_t, u_{t-\tau}).\end{aligned}$$

$$3) U_t^{(3)} : \varphi(x_t, y_t, u_{t-\tau}) = 0.$$

Поскольку при фиксированном значении $u_{t-\tau}$ это равенство определяет единственную (в силу строгой монотонности φ) зависимость x_t от y_t и $u_{t-\tau}$, то за $\bar{x}_t^{(3)}(y_t, u_{t-\tau})$ принимаем решение этого уравнения, и решение оптимизационной задачи не требуется (в силу единственности это решение является и условно оптимальным). В этом случае рестриктивная переменная z_t также принимает вид $z_t = f_2(x_t, y_t, u_{t-\tau})$, и дальнейший ход решения задачи оптимизации совпадает с предыдущим:

$$\begin{aligned}J_t^{(3)}(y_t, u_{t-\tau}) &= J(\bar{x}_t^{(3)}(y_t, u_{t-\tau}), y_t, f_2(\bar{x}_t^{(3)}(y_t, u_{t-\tau}), y_t, u_{t-\tau}), u_{t-\tau}), \\ U_t^{(3)} &= \{u_{t-\tau} : \varphi(\bar{x}_t^{(3)}(y_t, u_{t-\tau}), y_t, u_{t-\tau}) < 0\}, \\ \bar{u}_{t-\tau}^{(3)}(y_t) &= \arg \max_{u_{t-\tau} \in U_t^{(3)}} J_t^{(3)}(y_t, u_{t-\tau}).\end{aligned}$$

Окончательно за оптимальное значение управления $\hat{u}_{t-\tau}(y_t)$ принимаем то значение $\bar{u}_{t-\tau}^{(j)}(y_t)$, которому соответствует максимальное значение $\bar{J}_t^{(j)}(y_t)$.

Обратим внимание, что для вычисления в момент времени $t-\tau$ запаздывающего на время τ оптимального управления требуется предсказание значения переменной состояния y_t на будущий момент времени t (на τ шагов вперёд). Такое предсказание можно сделать с помощью представленной здесь математической модели.

3. Пример: оптимизация поставки товара на рынок

3.1. Математическая модель инерционного рынка одного товара

В качестве примера рассмотрим решение задачи математического описания и имитационного моделирования инерционного рынка одного товара при оптимальном управлении поставкой товара на рынок в условиях запаздывания поставок.

Рассмотрим модель рынка одного товара, функционирующую в дискретном времени $t \in N = \{0, 1, 2, \dots\}$. В этой модели x_t – цена товара в момент времени t (обозначим её $P(t)$), y_t – остаток товара на рынке (обозначим его $Q^O(t)$), $u_{t-\tau}$ – объём товара, заказываемого в момент времени $t - \tau$ для поставки на рынок в момент t (стратегия поставок, обозначим её $Q^Z(t - \tau)$). Спрос на товар при цене $P(t)$ обозначим через $Q^D(t)$. Пусть в момент t дискретного времени спрос на товар имеет вид простейшей линейной зависимости:

$$Q^D(t) = Q_m - aP(t), \quad (5)$$

где $Q_m > 0$ и $a > 0$ – заданные константы.

Пусть $Q(t)$ – объём товара, предлагаемого к продаже в момент времени t . Представим $Q(t)$ в виде суммы остатка товара в объёме $Q^O(t)$ от продаж на предыдущем интервале дискретного времени (и перешедшего на рынок в момент t) и товара в объёме $Q^Z(t - \tau)$, заказанного продавцом в момент времени $t - \tau$ (с учётом запаздывания поставки) для поставки его на рынок к моменту времени t :

$$Q(t) = Q^O(t) + Q^Z(t - \tau).$$

Обозначим объём продаж на интервале t дискретного времени через $Q^S(t)$. Очевидно,

$$Q^S(t) = \min(Q^D(t), Q^O(t) + Q^Z(t - \tau)). \quad (6)$$

Эта величина играет роль z_t в общей модели, а величина $Q^O(t)$ – роль y_t . Следовательно, роль функций φ , f_1 , f_2 играют функции $\varphi = Q^D(t) - Q^O(t) - Q^Z(t - \tau)$, $f_1 = Q^D(t) - Q^O(t) - Q^Z(t - \tau)$, $f_2 = Q^D(t)$.

Очевидно, остатки товара удовлетворяют рекуррентному соотношению:

$$Q^O(t+1) = Q^O(t) + Q^Z(t - \tau) - Q^S(t), \quad (7)$$

так что роль функции f играет функция $f = Q^O(t) + Q^Z(t - \tau) - Q^S(t)$.

Роль целевой функции J играет прибыль продавца, равная разности между выручкой от продажи товара и затратами на его приобретение и хранение. Если P_1 – цена закупки товара (на оптовом рынке или у производителя), P_2 – цена хранения единицы товара, не проданного на предыдущем интервале дискретного времени, то прибыль продавца в момент времени t составит величину:

$$J(t) = Q^S(t)P(t) - Q^Z(t)P_1 - Q^O(t)P_2 - \frac{R}{2}(P(t) - P(t-1))^2 \quad (8)$$

Последнее слагаемое (с коэффициентом $R > 0$) выражает «штрафные санкции» за изменение цены товара и определяет инерционность рынка – за резкое повышение цены могут последовать санкции законодательного характера, за резкое снижение цены – «санкции» конкурентов, выражающиеся в нанесении ущерба продавцу в размере, эквивалентном этой штрафной функции.

Возникает вопрос, какое значение примет цена товара $P(t)$ в момент времени t , если на предыдущем шаге $t - 1$ она равнялась $P(t - 1)$, и какую величину $Q^Z(t)$ дополнительной

поставки товара на рынок должен произвести продавец, чтобы прибыль продавца при заданной линии спроса на t -ом интервале дискретного времени была максимальной:

$$J(t) \Rightarrow \sup_{P(t), Q^S(t)} .$$

При решении этой задачи автоматически получатся значения и объёмов продаж $Q^S(t)$, и остатков непроданного товара $Q^O(t)$ для каждого текущего момента дискретного времени t . При этом, естественно, должны выполняться ограничения на величину возможной цены товара $P(t)$:

$$P_1 < P_{\min} < P(t) < P_{\max} = Q_m/a$$

и на величину дополнительного заказа товара $Q^Z(t) \geq 0$.

3.2. Условно-оптимальная цена товара

Пусть объём поставки товара на рынок в момент времени t есть $Q(t)$. Найдем оптимальную (обеспечивающую максимум прибыли продавца (8)) цену $P(t)$ товара при фиксированном значении $Q(t)$:

$$J(t) \Rightarrow \max_{P(t)|Q(t)} .$$

При решении этой задачи, учитывая ее рестриктивный в силу соотношения (6) характер, очевидно, следует выделить области, соответствующие дефициту товара на рынке (область 1, в которой $Q(t) < Q^D(t)$), затовариванию рынка (область 2, в которой $Q(t) > Q^D(t)$) и балансу спроса и предложения (область 3, область динамического равновесия, в которой $Q(t) = Q^D(t)$). Рассмотрим эти области подробнее.

1) **В области товарного дефицита** $Q(t) < Q^D(t)$, и в соответствии с соотношением (6) имеем $Q^S(t) = Q(t)$, так что

$$J(t) = Q(t)P(t) - Q(t)P_1 + Q^O(t)(P_1 - P_2) - \frac{R}{2}(P(t) - P(t-1))^2 \Rightarrow \sup_{P(t)|Q(t)} . \quad (9)$$

Это квадратичная функция переменной $P(t)$, выпуклая вверх. Следовательно, точка максимума достигается при

$$\frac{\partial J(t)}{\partial P(t)} = Q(t) - R(P(t) - P(t-1)) = 0 ,$$

откуда

$$P(t) = P(t-1) + \frac{Q(t)}{R} = P^{(1)}(t) . \quad (10)$$

Как видим, $P^{(1)}(t)$ растёт с ростом $Q(t)$ по линейному закону. Выражение (10) справедливо не при любом $Q(t)$, а лишь при $Q(t)$, удовлетворяющем условию $Q(t) < Q^D(t)$ принадлежности к области 1. Это условие с учетом (5) и (10) имеет вид:

$$Q(t) < Q_m - aP^{(1)}(t) = Q_m - aP(t-1) - \frac{a}{R}Q(t) ,$$

откуда

$$Q(t) < \frac{R(Q_m - aP(t-1))}{a + R} = Q^{(1)}(t) . \quad (11)$$

Таким образом, в области 1 $P(t)$ линейно растёт с ростом $Q(t)$ от значения

$$P^{(1)}(t)|_{Q(t)=0} = P(t-1)$$

до значения

$$P^{(1)}(t)|_{Q(t)=Q^{(1)}(t)} = \frac{Q_m + RP(t-1)}{a + R} = P_{\max}^{(1)}(t),$$

причем условие принадлежности $Q(t)$ к области 1 выражается неравенством (11).

2) **В области затоваривания рынка** $Q(t) > Q^D(t)$, и в соответствии с выражением (6) имеем $Q^S(t) = Q^D(t)$, так что с учетом (5):

$$J(t) = (Q_m - aP(t))P(t) - Q(t)P_1 + Q^O(t)(P_1 - P_2) - \frac{R}{2}(P(t) - P(t-1))^2 \Rightarrow \sup_{P(t)Q(t)}. \quad (12)$$

Это квадратичная выпуклая вверх функция переменной $P(t)$. Следовательно, точка максимума достигается при

$$\frac{\partial J(t)}{\partial P(t)} = Q_m - 2aP(t) - R(P(t) - P(t-1)) = 0,$$

откуда

$$P(t) = \frac{Q_m + RP(t-1)}{2a + R} = P^{(2)}(t). \quad (13)$$

Как видим, $P^{(2)}(t)$ не зависит от $Q(t)$ (остается постоянной при любом $Q(t)$ в этой области). Выражение (13) справедливо лишь при условии, что $Q(t) > Q^D(t)$, то есть при условии:

$$Q(t) > Q_m - aP^{(2)}(t) = \frac{(a + R)Q_m - aRP(t-1)}{2a + R},$$

откуда

$$Q(t) > \frac{R(Q_m - aP(t-1)) + aQ_m}{2a + R} = Q^{(2)}(t). \quad (14)$$

Последнее неравенство определяет условие принадлежности $Q(t)$ к области 2. Нетрудно показать, что $Q^{(2)}(t) > Q^{(1)}(t)$. Действительно, используя выражения (7) и (10), получим:

$$Q^{(2)}(t) - Q^{(1)}(t) = \frac{a^2(Q_m + RP(t-1))}{(a + R)(2a + R)} > 0,$$

что и требовалось доказать.

3) **В области баланса спроса и предложения** (то есть в области динамического равновесия рынка) $Q(t) = Q^D(t)$, и в соответствии с выражением (6) имеем, как и в области 2, объем продаж, равный спросу, то есть $Q^S(t) = Q^D(t)$, и прибыль $J(t)$ в виде (12). При этом, однако, $Q(t) = Q_m - aP(t)$, откуда

$$P(t) = \frac{Q_m - Q(t)}{a} = P^{(3)}(t). \quad (15)$$

Границами области 3 по $Q(t)$ являются точки $Q^{(1)}(t)$ и $Q^{(2)}(t)$:

$$Q^{(1)}(t) \leq Q(t) \leq Q^{(2)}(t).$$

Как видим из (15), в этой области $P^{(3)}(t)$ линейно убывает с ростом $Q(t)$ от значения

$$P^{(3)}(t)|_{Q(t)=Q^{(1)}(t)} = \frac{Q_m + RP(t-1)}{a + R} = P_{\max}^{(1)}(t)$$

до значения

$$P^{(3)}(t)|_{Q(t)=Q^{(2)}(t)} = \frac{Q_m + RP(t-1)}{2a + R} = P^{(2)}(t).$$

На рис. 1 в качестве примера изображена зависимость условно-оптимальной (при фиксированном $Q(t)$) цены $P(t)$ товара при следующих параметрах: $Q_m = 4$, $a = 0.4$, $P_1 = 3$, $R = 50$, $P(t-1) = 7$. При этом $Q^{(1)}(t) = 1.191$, $Q^{(2)}(t) = 1.213$, $P_{\max}^{(1)}(t) = 7.024$, $P^{(2)}(t) = 6.969$. Полужирным шрифтом выделены номера зон.

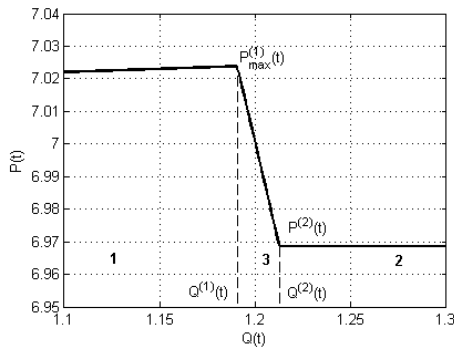


Рис. 1. Условно-оптимальная цена товара

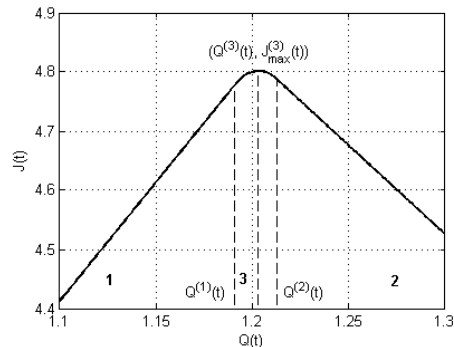


Рис. 2. Условно-максимальная прибыль

3.3. Условно-максимальная прибыль. Оптимальная цена товара и максимальная прибыль

Найдем теперь оптимальную цену товара и оптимальный уровень поставки товара на рынок, обеспечивающие максимальную прибыль продавца, если $P(t-1)$, $P_{\max}^{(1)}(t)$ и $P^{(2)}$ удовлетворяют ограничениям на $P(t)$. Решение этой задачи проведем по зонам (по зоне 1 – дефицита товара, зоне 2 – затоваривания рынка, зоне 3 – баланса спроса и предложения, то есть динамического рыночного равновесия).

1) **В зоне 1:** $0 < Q(t) < Q^{(1)}(t)$. После подстановки $P(t) = P^{(1)}(t)$ в выражение (9) для $J(t)$ имеем:

$$J(t) = \frac{Q(t)^2}{2R} + (P(t-1) - P_1)Q(t) + Q^o(t)(P_1 - P_2) = J^{(1)}(t).$$

Как видим, $J^{(1)}(t)$ монотонно растет с ростом $Q(t)$ по линейно-квадратичному закону, достигая максимального значения на границе области при $Q(t) = Q^{(1)}(t)$:

$$J_{\max}^{(1)}(t) = J^{(1)}(t)|_{Q(t)=Q^{(1)}(t)}.$$

Если остаток товара $Q^o(t)$ от продаж предыдущего интервала дискретного времени не превышает величину $Q^{(1)}(t)$, то дополнительный заказ и поставка товара на рынок в объеме $Q^z(t) = Q^{(1)}(t) - Q^o(t)$ (в частности, $Q^z(t) = 0$ при $Q^o(t) = Q^{(1)}(t)$) обеспечивает максимум прибыли. Иначе, при $Q^o(t) > Q^{(1)}(t)$, следует искать решение задачи оптимизации прибыли в областях 2 или 3.

2) **В зоне 2:** $Q(t) > Q^{(2)}(t)$. После подстановки в $J(t)$ для этой зоны $P(t) = P^{(2)}(t)$, не зависящего от $Q(t)$, имеем:

$$J(t) = (Q_m - aP^{(2)}(t))P^{(2)}(t) - Q(t)P_1 + Q^o(t)(P_1 - P_2) - \frac{R}{2}(P^{(2)}(t) - P(t-1))^2 = J^{(2)}(t).$$

Как видим, $J^{(2)}(t)$ монотонно убывает с ростом $Q(t)$ по линейному закону, так что достигает в этой зоне наибольшего значения при $Q(t) = Q^{(2)}(t)$:

$$J_{\max}^{(2)}(t) = J^{(2)}(t)|_{Q(t)=Q^{(2)}(t)}.$$

Если $Q^O(t) < Q^{(2)}(t)$, то дополнительный заказ и поставка товара на рынок в объеме $Q^Z(t) = Q^{(2)}(t) - Q^O(t)$ обеспечивает получение этого максимума прибыли. Если же $Q^O(t) > Q^{(2)}(t)$, то $Q^Z(t) = 0$, и достигается лишь значение прибыли $J^{(2)}(t)|_{Q(t)=Q^O(t)} < J_{\max}^{(2)}(t)$.

3) **В зоне 3:** $Q^{(1)}(t) \leq Q(t) \leq Q^{(2)}(t)$. После подстановки $P(t) = P^{(3)}(t)$ в $J(t)$ для этой зоны, имеем:

$$J(t) = Q(t) \frac{Q_m - Q(t)}{a} - Q(t)P_1 + Q^O(t)(P_1 - P_2) - \frac{R}{2} \left(\frac{Q_m - Q(t)}{a} - P(t-1) \right)^2 = J^{(3)}(t).$$

Это выпуклая вверх линейно-квадратичная функция переменной $Q(t)$. В точке максимума $J^{(3)}(t)$ по $Q(t)$

$$\frac{\partial J^{(3)}(t)}{\partial Q(t)} = \frac{1}{a^2} [R(Q_m - aP(t-1)) + a(Q_m - aP_1) - (2a + R)Q(t)] = 0,$$

откуда

$$Q(t) = \frac{R(Q_m - aP(t-1)) + a(Q_m - aP_1)}{2a + R} = Q^{(3)}(t).$$

В этой точке $J^{(3)}(t)$ достигает максимального значения. Нетрудно видеть, что $Q^{(1)}(t) < Q^{(3)}(t) < Q^{(2)}(t)$, то есть точка максимума $Q^{(3)}(t)$ лежит в области 3. Действительно, с учетом того, что $Q_m > P(t-1) > P_1$, имеем:

$$Q^{(3)}(t) - Q^{(1)}(t) = -\frac{aR(Q_m - aP(t-1))}{(2a + R)(a + R)} + \frac{a(Q_m - aP_1)}{2a + R} > \frac{a^2(Q_m - aP(t-1))}{(2a + R)(a + R)} > 0.$$

С другой стороны,

$$Q^{(3)}(t) - Q^{(2)}(t) = -\frac{aP_1}{2a + R} < 0.$$

Максимальное значение прибыли в зоне 3 равно (при $Q^O(t) < Q^{(3)}(t)$):

$$J_{\max}^{(3)}(t) = J^{(3)}(t)|_{Q(t)=Q^{(3)}(t)}.$$

Это значение является и глобально максимальным, потенциально возможным при $Q^O(t) \leq Q^{(3)}(t)$. Если же $Q^{(3)}(t) < Q^O(t) \leq Q^{(2)}(t)$, то глобально максимальное значение прибыли не может быть достигнуто, и достигается только условно-максимальное значение (при фиксированном $Q^O(t)$) внутри зоны 3, лежащее между $J_{\max}^{(3)}(t)$ и $J^{(2)}(t)$.

На рис. 2 для примера, рассмотренного выше, приведен ход условно-оптимальной прибыли (при фиксированном $Q(t)$ и при $Q^O(t) = 0$) с указанием точки глобального максимума ($Q^{(3)}(t) = 1.203$, $J_{\max}^{(3)}(t) = 4.802$).

Очевидно, глобальный максимум прибыли может быть получен только в том случае, если объем остатка товара, не проданного на предыдущем интервале времени, не превышает величину оптимального объема поставки товара на рынок: $Q^O(t) \leq Q^{(3)}(t)$. В противном случае прибыль продавца будет меньше максимально возможной. Причем, если при этом объём остатков товара будет оставаться в зоне 3, то есть будет лежать в интервале $Q^{(3)}(t) < Q^O(t) \leq Q^{(2)}(t)$, то рынок будет оставаться в состоянии динамического равновесия (спрос на товар будет оставаться равным предложению, в качестве которого будет выступать остаток товара). И только при $Q^O(t) > Q^{(2)}(t)$ предложение товара перейдет в зону 2, и начнется затоваривание рынка.

На рис. 3 представлена топокарта поверхности $J(t)$ как функция координат $Q(t), P(t)$. Линии горизонтальных сечений более высокого уровня – более светлые, низкого – более тёмные. На этом же рисунке светлыми кружочками показаны границы зон, чёрным кружочком показана точка абсолютного максимума прибыли. Полужирной линией представлена кривая условно-оптимальной цены $P(t)$ как функция предложения товара $Q(t)$ (та же, что на рис.1). Как видим, эта кривая в зонах 1 и 2 проходит по линиям градиента $J(t)$, то есть перпендикулярно линиям равного уровня поверхности прибыли, а в зоне 3 – по гребню поверхности прибыли, где спрос равен предложению. Двигаясь вдоль кривой условно-оптимальной цены, можно проследить, как меняется условно-максимальная прибыль продавца.

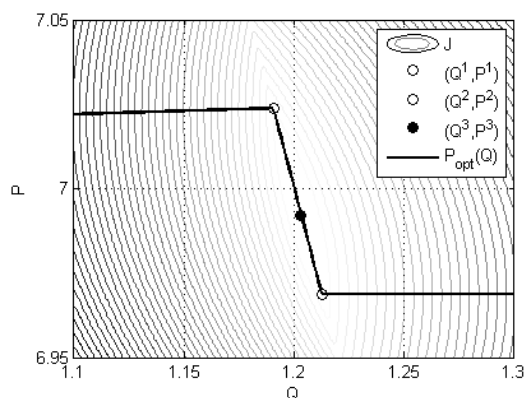


Рис. 3: Топокарта поверхности прибыли

3.4. Численное моделирование динамики рынка одного товара с оптимальным запаздывающим управлением

Рассмотрим модель функционирования рынка одного товара в дискретном времени $t \in N = \{0, 1, 2, \dots\}$. Моделируется ситуация, когда сначала рынок находится в состоянии равновесия, а в некоторый момент времени $t = 0$ выводится из равновесного положения (цена на товар резко меняет свое значение, например, резко увеличивается). Расчёты проводились при $R = 50, Q_m = 4, a = 0.4, T = 300, P_0 = 7, P_1 = 3, P_2 = 0.1, P_{\min} = P_1 + P_2, P_{\max} = Q_m/a, P^* = 6.5, Q_0 = 0, \tau = 10, 20, 30$. Динамика параметров рынка изображена на рис. 4 – 9.

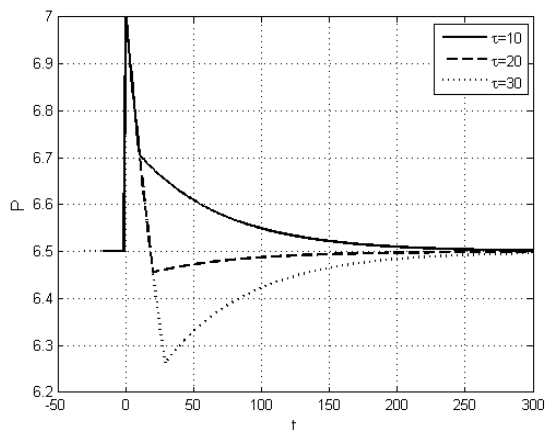


Рис. 4. Оптимальная динамика цены

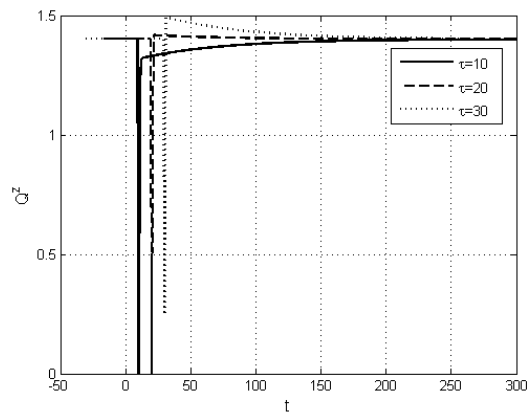


Рис. 5. Стратегия заказа товара

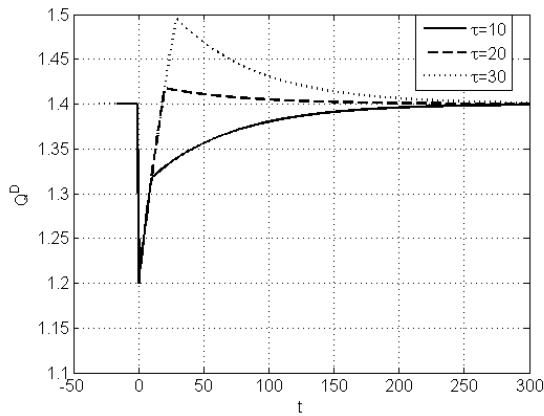


Рис. 6. Покупательский спрос

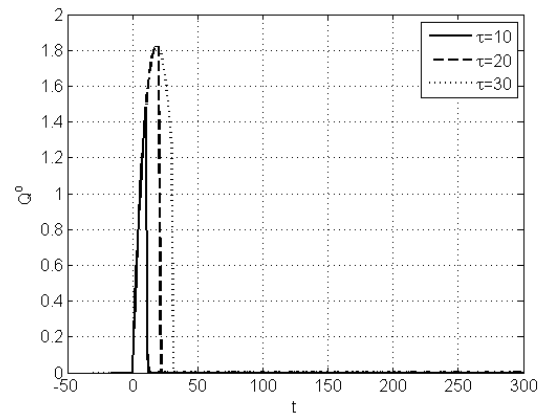


Рис. 7. Оптимальный запас товара

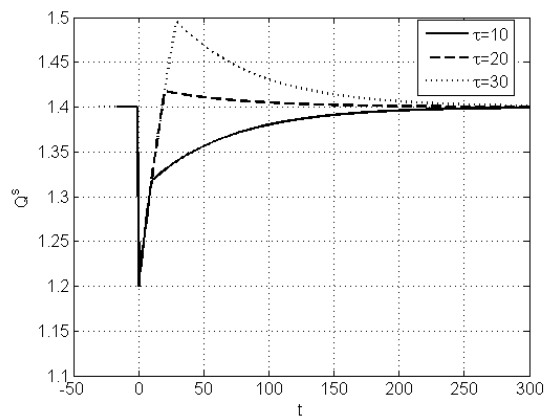


Рис. 8. Динамика продаж

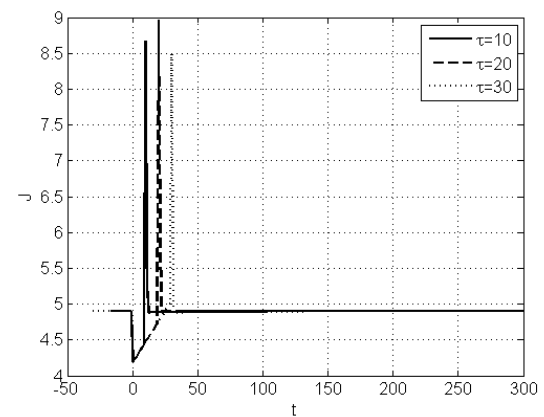


Рис. 9. Динамика прибыли

На рис. 4 видно, что цена сначала резко падает, а затем по экспоненте плавно поднимается до равновесного значения. Причем резкое падение цены происходит до момента $t = 10$ (для $\tau = 10$), $t = 20$ (для $\tau = 20$) и $t = 30$ (для $\tau = 30$). Дело в том, что на интервале $t \in [0, 10]$ ситуация на рынке уже изменилась (в связи с повышением цены товара), спрос упал, но на рынок (в связи с задержкой в поставках товара) продолжает поступать товар в объемах, необходимых для равновесного рынка. Как следствие – затоваривание рынка и скопление излишков товара на складе (рис. 7). Изменение поведения цены в момент, например, $t = 10$ (для $\tau = 10$) связан с тем, что с этого момента на рынок поступает товар в уже скорректированных объемах – продавец делал заказ товара уже после скачка цены на товар, следовательно, заказывал его в уже меньших объемах, что предотвращает затоваривание рынка и стремительное уменьшение цены на товар.

Заметим, что момент времени изменения поведения цены не обязательно совпадает с задержкой τ . Если в этот момент рынок все еще затоварен, то цена еще некоторое время будет резко падать (например, если изменить параметр линии спроса $a = 0.5$). Интересно поведение функции прибыли. На начальном интервале прибыль падает. Это связано с падением спроса на товар. Но затем идет скачкообразное повышение прибыли, связанное с тем, что продавцу не надо платить за покупку товара, так как размер заказанного товара в этот момент равен нулю (это связано с затовариванием рынка).

На рис. 10 – 15 отображена динамика основных переменных функционирования рынка при условии, что в момент времени $t = 0$ рынок был выведен из состояния равновесия резким падением цены товара. Расчёты проводились при $R = 50$, $Q_m = 4$, $a = 0.4$, $T = 300$, $P_0 = 5.5$, $P_1 = 3$, $P_2 = 0.1$, $P_{\min} = P_1 + P_2$, $P_{\max} = Q_m/a$, $P^* = 6.5$, $Q_0 = 0$, $\tau = 10, 20, 30$.

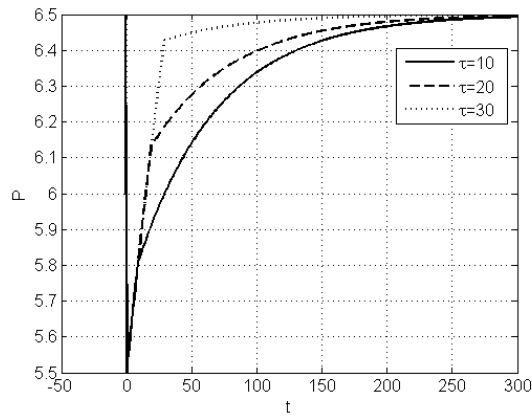


Рис. 10. Оптимальная динамика цены

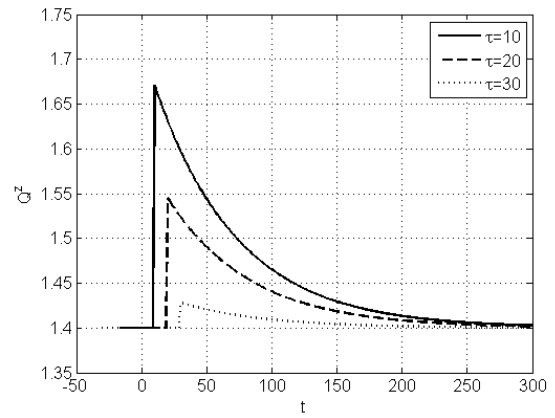


Рис. 11. Стратегия заказа товара

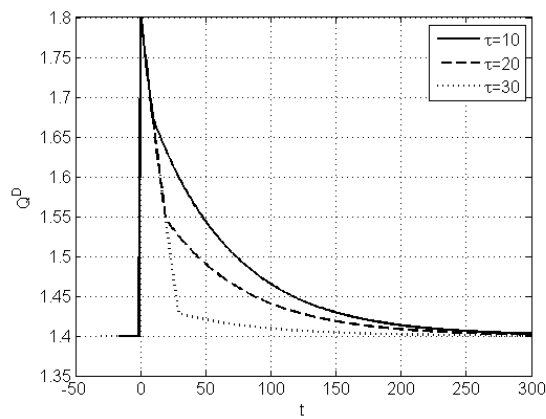


Рис. 12. Покупательский спрос

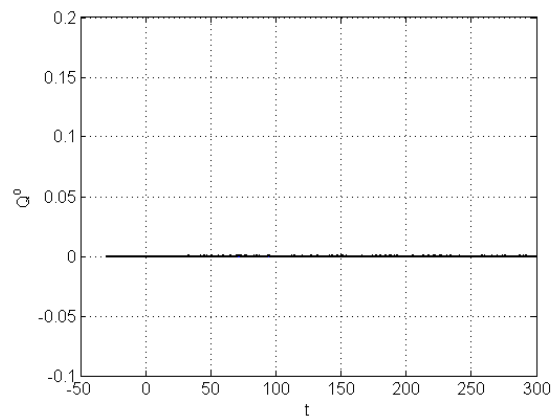


Рис. 13. Оптимальный запас товара

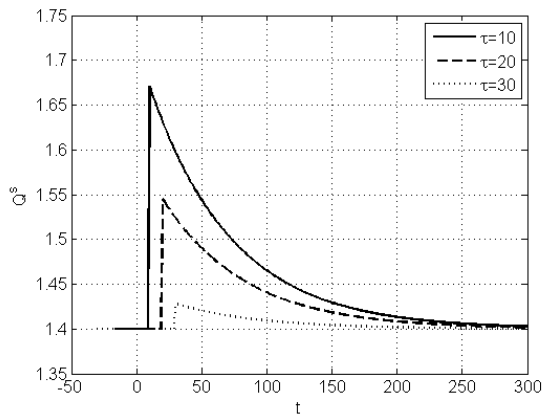


Рис. 14. Динамика продаж

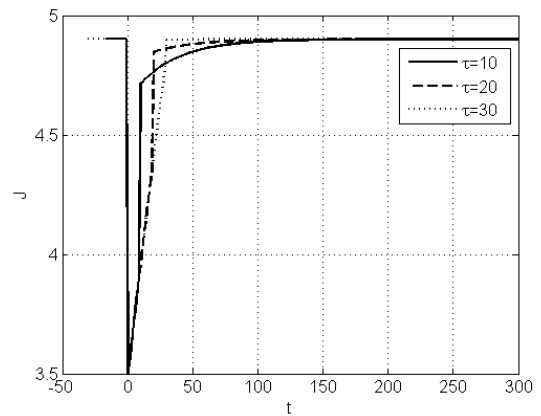


Рис.15. Динамика прибыли

Проанализируем ситуацию, когда цена на товар резко упала. Рынок реагирует на это резким повышением спроса на товар. На интервале $t \in [0,10]$ на рынок поступает товар в недостаточных объёмах, что связано с задержкой в поставках товара, когда на рынок поступает объём товара, который был необходим для рынка в состоянии равновесия. Как следствие, излишков товара на складе нет (рис. 13). На рис. 10 видно, что, так же, как и в предыдущем примере, есть точка изменения характера поведения цены товара. Это изменение также связано с тем, что с этого момента на рынок поступает товар в уже скорректированных объёмах, и происходит постепенное насыщение рынка.

ЛИТЕРАТУРА

- [1]. Гальперин В.М., Игнатъев С.М., Морозов В.И. Микроэкономика: В 2-х т. Т.1. – СПб: Экономическая школа, 2002.
- [2]. Поддубный В.В., Романович О.В. Рынок как самоуправляемая инерционная динамическая система с запаздыванием при сбалансированной стратегии поставок товара // Вестник ТГУ. УВТИ. – 2009. – 4 (9). – С. 5–16.
- [3]. Поддубный В.В., Романович О.В. Рынок с фиксированной линией спроса как оптимальная система // Труды X Международной ФАМЭТ 2011 конференции / Под ред. О.Ю. Воробьева. – Красноярск: КГТЭИ, СФУ, 2011. – С. 318–323.
- [4]. Горячев А.С., Савин И.А. Основы ИВЛ. – [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://anest.ugansk.ru/EbookMV/index.html>