

## **Численное моделирование наката волн цунами методом крупных частиц**

А.Д. Рычков

*Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия*

e-mail: prof.a.d.rychkov@gmail.com

H. Milosevic

*University of Pristine, faculty of Science and Mathematics, Kosovska Mitrovica, Serbia*

e-mail: mhrane@gmail.com

С.А. Бейзель

*Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия*

e-mail: beisels@gmail.com

Японский термин цунами означает большую волну в бухте, набегающую на побережье, вызванную подводным землетрясением, извержением подводного вулкана или подводным оползнем. Это опасное по своим последствиям природное явление часто приводит к гигантским по своим масштабам разрушениям и гибели большого числа людей. При разработке средств решения задач об оценке возможности возникновения такого явления и прогнозирования его последствий ключевую роль играет численное моделирование процессов возникновения и распространения волн цунами, а также их наката на побережье. Задача о накате волны цунами в рамках модели мелкой воды и рассматривается в данной работе. Основной целью является определение зон затопления и максимальных высот заплеска воды на суше. Такого класса задачи относятся к задачам волновой гидродинамики со свободной поверхностью, для решения которых разработано достаточно много численных методов. Одним из таких популярных методов в последние годы стал бессеточный метод SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) [1], являющийся дальнейшим развитием метода частиц в ячейках (PIC). В отличие от метода PIC, в SPH отсутствует эйлеров этап. Это позволяет, с одной стороны, сделать метод более робастным, применимым для расчета течений в сложных областях, но, с другой стороны, требует разработки ряда сложных процедур сглаживания для описания взаимодействия между частицами, что не обеспечивает полную консервативность метода. В методе крупных частиц (КЧ), используемых в данной работе применительно к задачам динамики волн цунами в рамках теории мелкой воды, также, как и в методе SPH, используются частицы в виде «элементарного столбика воды», называемые в дальнейшем «крупными частицами», описание движения которых происходит в два этапа – лагранжевого и эйлерова. Это позволяет существенно упростить процедуру учета взаимодействия между частицами, обеспечивая в то же время достаточно точное воспроизведение наката (отката)

воды на сухой берег и строгое выполнение законов сохранения. Заметим, что число частиц, необходимых для решения двумерных задач в методе SPH с необходимой точностью, составляет примерно 100000 [2]. Это число сравнимо с числом узлов разностной сетки в методе КЧ, однако программная реализация метода КЧ существенно проще, а число операций, затрачиваемое на расчет движения одной крупной частицы, примерно на два порядка меньше, чем в SPH.

## 1. Численный метод

В рамках модели мелкой воды рассматривается задача о накате волн на берег со сложной формой береговой кромки. С учетом силы трения система уравнений, описывающая движение волн в декартовой системе координат, координатная плоскость которой  $z = 0$  совпадает с поверхностью «спокойной» воды, записывается в следующем виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial Hu}{\partial x} + \frac{\partial Hv}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial Hu}{\partial t} + \frac{\partial Hu^2}{\partial x} + \frac{\partial Huv}{\partial y} + \frac{g}{2} \frac{\partial H^2}{\partial x} &= gH \frac{\partial h}{\partial x} - uHC_R, \\ \frac{\partial Hv}{\partial t} + \frac{\partial Huv}{\partial x} + \frac{\partial Hv^2}{\partial y} + \frac{g}{2} \frac{\partial H^2}{\partial y} &= gH \frac{\partial h}{\partial y} - vHC_R, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $H(x, y, t)$ ,  $h(x, y)$  – глубина воды и профиль дна соответственно, отсчитываемые от поверхности воды,  $u(x, y, t)$ ,  $v(x, y, t)$  – декартовы координаты осредненного по глубине вектора скорости  $\vec{u}(x, y, t)$ ,  $C_R$  – коэффициент трения,  $g$  – ускорение силы тяжести. Для определения коэффициента  $C_R$  использовалась известная формула:  $C_R = \frac{gn^2}{H^{4/3}} |\vec{u}|$ , где  $n$  – эмпирический коэффициент шероховатости. Областью решения системы (1) являлся прямоугольник  $D\{0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y\}$  с профилем дна, заданным соответствующей батиметрией. На открытых границах расчетной области задавались неотражающие граничные условия, в области суши все характеристики жидкости в (1) полагались равными нулю. На входной границе задавалось изменяющееся во времени значение величины  $H(\cdot, \cdot, t)$ , полученное по результатам моделирования подхода к побережью океанской волны.

Для численного решения системы (1) применялся метод крупных частиц [3]. Использование «классического» метода частиц в ячейках оказалось невозможным в силу статистического характера получаемого с его помощью решения. Такое решение не удовлетворяет условию гидростатического равновесия жидкости в покоящейся воде и значительно искажает процесс распространения волны. Метод крупных частиц лишен этого недостатка и позволяет получить сбалансированную разностную схему. При его реализации

использовалась равномерная прямоугольная разностная сетка, что обусловлено следующими причинами:

- форма береговой кромки является достаточно сильно изрезанной и поэтому очень трудно построить криволинейную разностную сетку, пригодную для решения системы (1);
- в процессе наката волны происходит затекание воды во впадины, наличие которых обусловлено рельефом суши (устье рек, каньоны и т.п.), а также обтекание различного рода возвышенностей, поэтому использовать адаптивную сетку, «привязанную» к линии уреза, не представляется возможным;
- по этой же причине возникают проблемы со сгущением прямоугольной сетки, поскольку заранее неясно, в каких местах области решения ее следует сгущать.

По-видимому, наиболее целесообразным для решения данного класса задач является использование прямоугольных составных сеток, границы которых можно перестраивать по мере продвижения воды по суше.

Реализация метода крупных частиц проводится в два этапа. На первом (эйлеровом) этапе в системе (1) отбрасываются все конвективные члены и система записывается в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial(H-h)}{\partial x} &= -uC_R, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial(H-h)}{\partial y} &= -vC_R. \end{aligned} \quad (2)$$

На втором (лагранжевом) этапе решаются уравнения переноса:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial Hu}{\partial x} + \frac{\partial Hv}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial Hu}{\partial t} + \frac{\partial Hu^2}{\partial x} + \frac{\partial Huv}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial Hv}{\partial t} + \frac{\partial Huv}{\partial x} + \frac{\partial Hv^2}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Для решения систем (2), (3) строится явная разностная схема первого порядка точности. Заметим, что в силу изрезанности берегового рельефа суши для получения численного решения, воспроизводящего картину заплеска с высоким разрешением, как уже отмечалось выше, необходимо использовать достаточно мелкую разностную сетку. Поэтому применение схем первого порядка точности, обладающих к тому же монотонными свойствами, вполне оправдано. При построении таких схем использовалась разностная сетка с разнесенными узлами, структура которой приведена на рисунке 1. В узлах сетки определены сеточные

функции  $H_{i,j}$  и  $h_{i,j}$  (кружочки), расположение компонент скорости  $u_{i+1/2,j}$ ,  $v_{i,j+1/2}$  обозначено квадратиками и треугольниками соответственно.

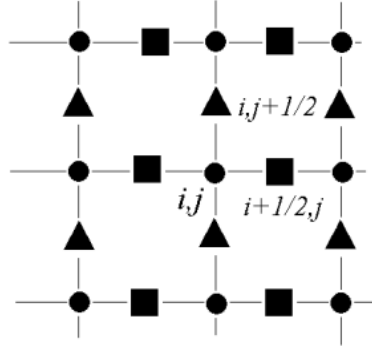


Рис. 1. Структура разностной сетки.

Разностная схема первого этапа записывается:

$$\begin{aligned}\tilde{H}_{i,j} &= H_{i,j}^n, \\ \tilde{u}_{i+1/2,j} &= (u_{i+1/2,j}^n - \Delta t ((H-h)_{i+1,j}^n - (H-h)_{i,j}^n) / \Delta x) / (1 + \Delta t C_R), \\ \tilde{v}_{i,j+1/2} &= (v_{i,j+1/2}^n - \Delta t ((H-h)_{i,j+1}^n - (H-h)_{i,j}^n) / \Delta y) / (1 + \Delta t C_R).\end{aligned}\quad (4)$$

На втором этапе для уравнений переноса (3) используется противопотоковая разностная схема:

$$\begin{aligned}H_{i,j}^{n+1} &= \tilde{H}_{i,j} - \Delta t ((\tilde{q}_{i+1/2,j} - \tilde{q}_{i-1/2,j}) / \Delta x + (\tilde{q}_{i,j+1/2} - \tilde{q}_{i,j-1/2}) / \Delta y), \\ \tilde{q}_{i+1/2,j} &= \begin{cases} \tilde{H}_{i,j} \tilde{u}_{i+1/2,j} & \text{if } \tilde{u}_{i+1/2,j} > 0, \\ \tilde{H}_{i+1,j} \tilde{u}_{i+1/2,j} & \text{if } \tilde{u}_{i+1/2,j} < 0, \end{cases} \quad \tilde{q}_{i,j+1/2} = \begin{cases} \tilde{H}_{i,j} \tilde{v}_{i,j+1/2} & \text{if } \tilde{v}_{i,j+1/2} > 0, \\ \tilde{H}_{i,j+1} \tilde{v}_{i,j+1/2} & \text{if } \tilde{v}_{i,j+1/2} < 0. \end{cases}\end{aligned}\quad (5)$$

Аналогичным образом записываются выражения для вычисления значений  $(Hu)_{i+1/2,j}^{n+1}$  и  $(Hv)_{i,j+1/2}^{n+1}$ . Условием устойчивости разностной схемы является выполнение неравенства

$$\Delta t \leq \alpha \cdot \min \left\{ \frac{\Delta x}{|u| + \sqrt{gH}}, \frac{\Delta y}{|v| + \sqrt{gH}} \right\} \quad \text{во всех узлах разностной сетки, где } 0 < \alpha < 1 -$$

эмпирический коэффициент запаса устойчивости.

## 2. Некоторые результаты расчетов.

С целью верификации предложенной методики был выполнен известный тест для двумерных численных алгоритмов расчета наката – задача об обтекании уединенной волной цилиндрического острова (Benchmark Problem 2) [4]. Эта задача решается в акватории постоянной глубины 0.32 м., шириной 30 м. и длиной 25 м., примерно в центре которой помещен усеченный конус с диаметром 7.2 м. у основания и 2.2 м. у вершины. Высота конуса – 0.625 м. В таком бассейне были проведены лабораторные эксперименты, в ходе которых

определялись максимальные величины вертикального заплеска волн разной начальной амплитуды. На рисунке 2 приведена картина обтекания острова в момент обтекания его волной. Виден характерный заплеск на тыльной (теневой) стороне острова, высота которого и размер зоны затопления, полученные авторами в ходе численных расчетов, вполне удовлетворительно совпадают с экспериментом. Анализ результатов расчетов показал важность учета нелинейности изучаемого процесса, которая проявляется в том, что если при малой амплитуде падающей волны удастся подобрать коэффициент шероховатости, при котором результаты численного моделирования вплотную приближаются к экспериментальным данным вдоль всего периметра конического острова, то при увеличении амплитуды падающей волны такого единого параметра подобрать не удастся. В этом случае экспериментальные данные о заплеске в тыльной (теневой) зоне острова хорошо воспроизводятся при нулевом значении коэффициента Шези, а в остальных частях – при его значении, равном 0.004.

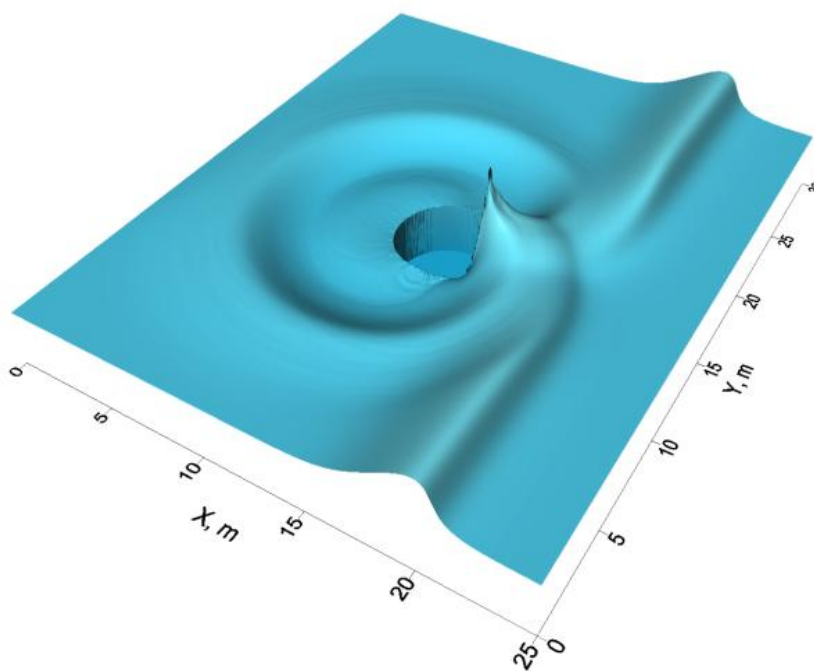


Рис. 2. Структура волны при обтекании модельного конического острова.

С помощью изложенного метода были выполнены расчеты зон затопления побережья пяти областей Японии под воздействием происшедших в недавнем прошлом волн цунами (Tohoku, 2011; Kanto, 1923; Nankai, 1946; Tonankai, 1944; Ansei-Tokai, 1854).

Для события Tohoku, 2011 ниже представлены результаты расчетов зон затопления, полученные по изложенной выше двумерной методике, которые сравнивались с результатами расчетов по одномерной модели, выполненные Г.С. Хакимзяновым (рис. 3). Здесь изображены

изолинии рельефа суши: 0 м (черная), 5 м (красная), 10 м (оранжевая), 20 м (желтая), 30 м (зеленая) и глубин – белой линией нарисована изобата 100м. Оранжевые прямые линии указывают сечения, вдоль которых проводилось 1D моделирование наката волн цунами. Видно, что результаты двумерных и одномерных расчетов практически совпадают, когда фронт волны является достаточно плоским и движется к побережью в направлении нормали.

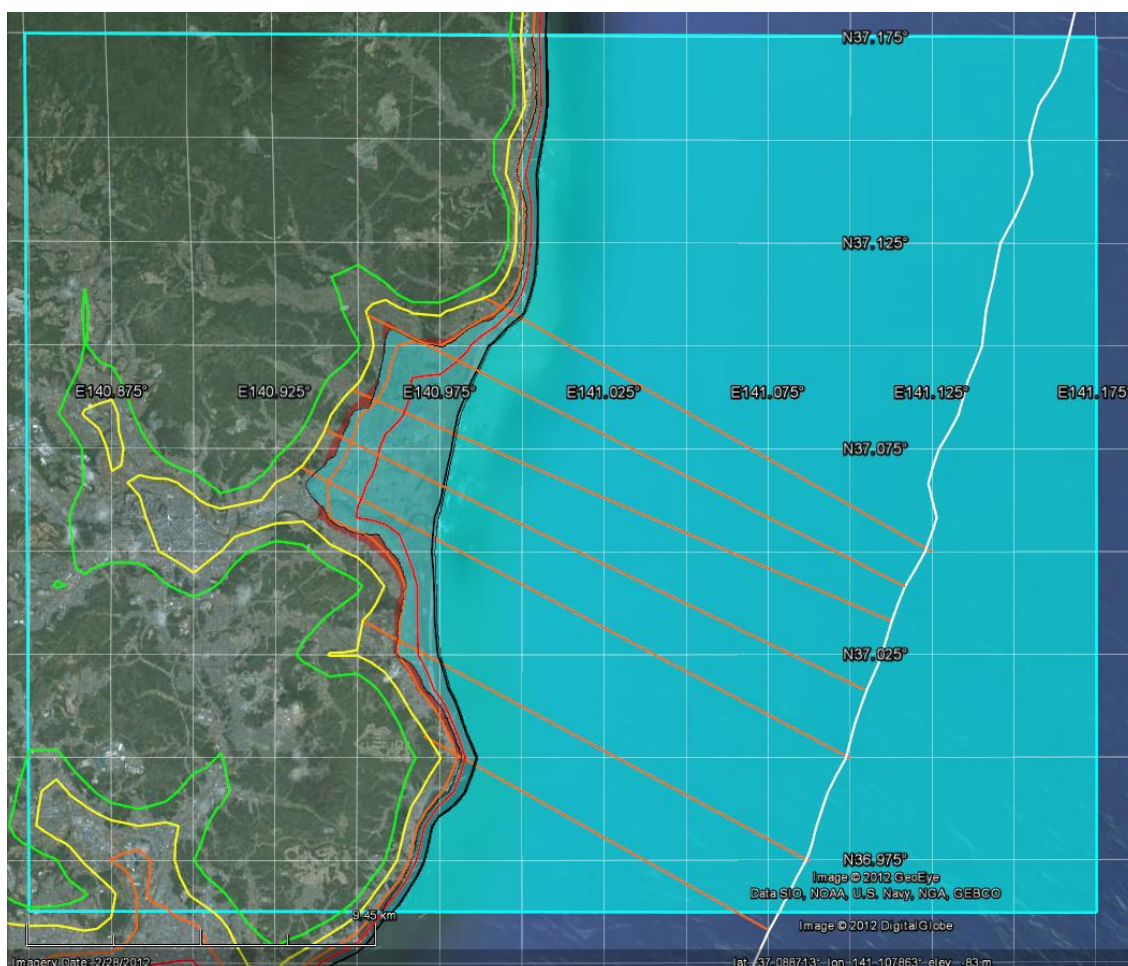


Рис. 3. Зоны затопления побережья, рассчитанные для случая Tohoku, 2011: 1D моделирование (красная заливка), 2D моделирование (голубая заливка).

## Литература

1. Oger, G., Doring, M., Alessandrini, B., Ferrant, P. Two-dimensional SPH simulations of wedge water entries // J. Comput. Phys, 2006. Vol. 213. P. 803–822.
2. Mattheieu De Leffe, David Le Touze, Bertrand Alessandrini, SPH modeling of shallow-water coastal flows // Journal of Hydraulic Research, 2010. Vol. 48, Extra Issue. P. 118–125.
3. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Метод крупных частиц в газовой динамике. М.; Наука, 1982. 392 с.
4. Long-wave runup models. Editors: Yeh H., Liu P., Synolakis C. World Scientific, Singapore, 1996. 404 p.