**Математическая модель барабанной перепонки**

В зависимости от условий динамического деформирования (нагружения) и от реологии материала существуют в механике деформируемого твердого тела различные замкнутые математические модели, среди которых важное место занимают те, которые описываются системами уравнений гипербо­лического типа, и, прежде всего, простейшие модели линейной и нелинейной теории упругости и пластичности.

В тензорной форме используемая система двумерных динамических уравнений имеет вид

, , , *i*, *j* = 1, 2,

где — компоненты вектора скорости, *U* — плотность внутренней энергии,  — компоненты тензоров деформаций и напряжений,  — ковариантная производная по *k*-й координате, *Q* — плотность источников энергии, тензор четвертого ранга  задается в соответствии с реологией среды. Для модели упруго-идеальнопластической среды

,

где  — символ Кронекера, λ, μ — постоянные Ламе, *k* – предел текучести на единичный вектор, ρ — плотность,  — девиатор тензора напряжения,   — коэффициент линейного расширения, *I* определяется из условия текучести Мизеса:



Мы использовали матричное представление приведенных уравнений [1].

При использовании для аппроксимации системы уравнений явной схемы сеточно-характеристического метода, расчетными формулами во внутренних узловых точках , *m* = 1, 2,…, *М* – 1, *l* = 1, 2,…,*L* – 1, будут соотношения







, , , , *j* = 1, 2, *i* = 1, 2,…,7,

 — собственные значения матриц  *k* = 1, 2, определяемые из характеристических уравнений   — неособенные матрицы, строками которых являются линейно независимые левые собственные векторы  матриц *,* определяемые с точностью до их длины из совокупности линейных однородных систем уравнений *, i =* 1,…,7;  — обратные к *,* матрицы;  *—* транспонированные матрицы . Аналитическое выражение элементов матриц  аналогично приведенному в [1].

При построении расчетных формул на границах прямоугольной (в координатах ) области интегрирования ограничимся рассмотрением только верхней () и нижней () границ, имея в виду, что остальные границы () часто являются плоскостью (или осью) симметрии, либо выбираются таким образом, чтобы за рассматриваемое время  возмущения от неоднородностей в начальных данных не достигали этих границ. Обобщение на случай более сложных условий на границах  не представляет принципиальных трудностей и аналогично рассматриваемому ниже.

Умножая полученные разностные соотношения скалярно на собственные векторы , получаем соотношения

 *l* = 0,…, *L*, аппроксимирующие с первым порядком точности условия совместности вдоль линий пересечения характеристических поверхностей системы и координатной плоскости  (с уравнениями ):

, *i* = 1, 2,…,7.

Как известно, число граничных условий для гиперболической системы уравнений определяется числом отрицательных (положительных) собственных значений матрицы  на верхней (соответственно, нижней) границе области интегрирования. В рассматриваемых ниже задачах на верхней границе  имеет место *,* на нижней границе  — соответственно, , и, следовательно, на каждой из этих границ требуется постановка двух граничных условий. Запишем их в виде:

, *i* = 1, 2 при ,

, *i* = 6, 7 при ,

причем необходимо, чтобы , , где, соответственно,

, .

Здесь , *i* = 1, 2,…,7, а , *i* = 1, 2,…,7 — собственные векторы матрицы . Для рассматриваемых ниже задач граничные условия выбирались полулинейными и после их аппроксимации имели вид:

, *i* = 1, 2 при , *i* = 6, 7 при .

Привлекая полученные разностные соотношения при *i* = 3,…, 7 для границы  и при *i* = 3,…, 7 — для границы , получаем все необходимые расчетные формулы для точек, принадлежащих этим границам. Для расчета точек, принадлежащих границам , использовались обычные расчетные формулы с привлечением дополнительных «лучей»  (*m* = –1),  (*m* = *M*+1), для которых компоненты искомого вектора *u* определялись по данным внутри области интегрирования с учетом соответствующей симметрии или периодичности решения, либо экстраполяцией (в зависимости от типа границы).

Шаг по времени выбирался из условия устойчивости, имеющего вид .

В устойчивых, но не монотонных разностных схемах, в которых на негладких решениях возникают нефизические осцилляции, используются различные способы регуляризации разрывных численных решений, вводимые во всей области интегрирования либо только вблизи разрывов.

Несмотря на все разнообразие реализации, сущность различных способов регуляризации достаточно проста. В простейших случаях она заключается в выборе двух (или более) опорных схем (одна из которых имеет достаточно высокий порядок точности, но является немонотонной и на разрывных решениях осциллирующей, другая положительно определена по Фридрихсу или близка к ним, но имеет первый порядок точности), и в организации перехода между ними в зависимости от поведения решения. Также можно трактовать и те разностные схемы, в которых используется явное либо опосредованное введение в схему членов, соответствующих разностной аппроксимации отсутствующих в системах уравнений гиперболического типа четных пространственных производных (vxx, vxxxx и т. п.) с некоторыми малыми коэффициентами при них, что, как замечено, оказывает стабилизирующее действие на численное решение.

Естественно ожидать, что наилучшие результаты будут при использовании в качестве опорных схемы первого порядка аппроксимации с минимальной аппроксимационной вязкостью, которая в сравнении с другими монотонными схемами меньше размазывают фронты разрывов, и схемы высокого порядка точности, наиболее близкой к схемам с положительной аппроксимацией. Среди других схем высокого порядка она дает наименее осциллирующее решение.

Преимущество первого варианта — монотонность и минимальная аппроксимационная вязкость, второго — меньшее размазывание фронтов разрывов. Недостатком в первом случае является растущее со временем, как *,* «размазывание» фронтов, недостаток второго — осциллирующий характер решения вблизи этих фронтов. Естественный шаг к улучшению численного описания фронтов — реализация некоторой промежуточной схемы. Это можно сделать следующим образом: записать разностную схему в виде:





При α = 1 получим схему первого порядка аппроксимации, при α = 0 — второго; аналогично, положив 0 < α = const < l, получим некую промежуточную схему (также немонотонную, формально первого порядка аппроксимации), которая при хорошем экспериментальном выборе α позволит улучшить качество численного решения вблизи разрывов. Этот подход описан в работах [2.3]

**Список литературы**

1. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. — М.: Наука, 1988.
2. *Петров И.Б., Холодов А.С.* О регуляризации разрывных численных решений уравнений гиперболического типа. // ЖВMиМФ. 1984. — Т. 24. — № 8. — С. 1172 – 1188.
3. *Петров И.Б., Тормасов А.Г., Холодов А.С.* Об использовании гибридизированных сеточно-характеристических схем для численного решения трехмерных задач динамики диформируемого твердого тела. // ЖВMиМФ. 1990 — Т. 30. — № 8. — С. 1237–1244.