

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ВОДЫ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Аннотация

Из-за роста числа промышленных и бытовых сбросов, загрязняющих водный поток, изучение загрязнения рек стало серьезной задачей. Поэтому необходим постоянный мониторинг качества воды в целях контроля за соблюдением стандартов. Требуется установить определенные пределы параметрам качества воды. Наиболее часто для определения степени загрязнения потоков используются биохимическая потребность кислорода (БПК) и растворенный кислород (РК). Знание соответствия концентрации в потоке РК величине вносимых органических отходов имеет важное значение для выбора концентрации РК, поддерживающей жизни в водной среде. Следовательно, требуется развитие реалистичных и работоспособных математических моделей для прогнозирования концентраций БПК и РК в точках расположенных ниже по потоку от источника загрязнения.

В работе рассматривается применение различных методов оценки параметров качества водных потоков. Отмечается, что для многих случаев эффективен подход, основанный на символьных формулах решений дифференциальных уравнений и вычислению их областей.

Ключевые слова: математические модели оценки

качества воды, растворенный кислород, биохимическая потребность кислорода, гарантированные границы решений.

Было предложено несколько математических моделей прогнозирования биохимической потребности кислорода (БПК) и растворенного кислорода (РК), начиная с классической модели Стритера и Фелпса. Уравнение Стритера-Фелпса определяет соотношение между концентрацией растворенного кислорода и биохимическим потреблением кислорода в течение достаточно большого интервала времени и является решением линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dD}{dt} = k_1 L - k_2 D \quad (1)$$

Здесь D – величина дефицита насыщения кислородом, которая может быть получена как разность концентрации растворенного кислорода при насыщении и фактической концентрации растворенного кислорода

$$D = DO_{sat} - DO. D \text{ имеет размерность } \frac{g}{m^3};$$

k_1 – скорость дезоксигенации, как правило, величина порядка D^{-1} ; k_2 – скорость реаэрации, как правило, величина порядка D^{-1} ; L_A – начальная потребность органического вещества в воде в кислороде, эта величина также называется $BOD(0)$ (БПК в момент времени $t = 0$). Единица L_A имеет размерность $\frac{g}{m^3}$; L_t – потребность в кислороде, на момент

времени t , $L_t = L_A \cdot e^{-k_1 t}$; D_A – дефицит кислорода в начальный момент времени размерности $\frac{g}{m^3}$; t – истекшее время, размерности $[D]$.

Величина k_1 обычно лежит в пределах $0,05 - 0,5 \cdot d^{-1}$ и k_2 лежит обычно в пределах $0,4 - 1,5 \cdot d^{-1}$. Уравнение Стритера -Фелпса также известно как уравнение прогиба растворенного кислорода DO. Это связано с формой графика DO с течением времени. Особое значение придается моделированию РК, БПК взаимодействию на участке далеко от эстуария. Для этого случая модель строится как объем воды, протекающей через участок реки, который можно подходящим образом задать верхними и нижними границами, соответствующими положениям плотин, устьями рукавов и притоков. Определяя модель таким образом, получаем удобное описание реки с наглядно и осмысленно выделенными входами и выходами.



Рисунок 1 – Участок естественной речной сети,

имеющей структуру узел-дуга

Дифференциальное уравнение (1) устанавливает, что общее изменение дефицита кислорода (D) равна разнице между двумя показателями дезоксигенации и реаэрации на любой момент времени. Некоторые исследователи считают, что стохастические модели загрязнений являются более реалистичными, чем детерминированные, в силу случайных возмущений, входящих в них параметров. Среди стохастических моделей использовались марковские цепи для предсказания вероятности того, что концентрация РК становится меньше допустимого уровня, установленного для конкретного периода времени в точках потока, расположенных ниже источника загрязнения. Рассматривался процесс гибели-размножения и использовалась функция, генерирующая вероятности, чтобы определить вероятности нахождения БПК и РК в различных состояниях в точках потока. Коэффициент деоксигенации часто считается нормально распределенной случайной величиной и на основе этого оценивается плотность вероятности БПК в точках ниже от источника загрязнения по потоку. При сделанных предположениях было получено, что БПК имеет лог-нормальное распределение в каждой точке потока. В [2] разработана модель случайных блужданий для прогнозирования распределения БПК, если коэффициент деоксигенации выбирается как нормально распределенная случайная величина. Также в [2] применялся метод Монте-Карло для имитации процесса случайного блуждания и оценки распределения дефицита растворенного кислорода

в точках потока, когда оба коэффициента деоксигенации и реаэрации считаются нормально распределенными случайными переменными.

В [3] предложен иной подход случайного дифференциального уравнения. Детерминированные дифференциальные уравнения Доббинса, решения которых описывают профили БПК и РК вдоль участка потока, рассматриваются как дифференциальные уравнения со случайными начальными данными и случайными правыми частями. Применялось уравнение Лиувилля для установления плотностей вероятности, а также статистические свойства процессов БПК и РК на указанных расстояниях вниз по потоку. В [3] предполагается, что

(i) при загрязнении БПК и РК снижаются под действием бактерий. Скорость уменьшения считается пропорциональной количеству загрязнений, присутствующих с коэффициентом пропорциональности k_1 (коэффициент деоксигенации) в единицах растворенного кислорода в день (частей на миллион), и всегда есть некоторое количество кислорода;

(ii) Количество растворенного кислорода увеличивается в процессе реаэрации со скоростью пропорциональной дефициту растворенного кислорода (которая равняется концентрации насыщения DO минус фактическая концентрация DO) и с коэффициентом пропорциональности k_2 (коэффициент реаэрации), выраженного в единицах растворенного кислорода (промилле) в день;

(iii) Загрязнение может уменьшаться только путем осаждения и адсорбции в размере пропорциональном количеству загрязнений с константой пропорциональности k_3 , выраженной в единицах растворенного кислорода в день

(iv) Загрязнение возрастает под действием небольших источников загрязнения вдоль всего потока со скоростью l_a промилль (одномиллионная часть) в день, это не зависит от величины присутствующего загрязнения;

(v) Величина растворенного кислорода увеличивается со скоростью d_B промилль в день. Переменная d_B может принимать как положительные так и отрицательные значения и представляет собой чистое изменение содержания кислорода из-за донных потребностей, дыхания и фотосинтеза растений.

Также предполагаем, что поток стационарен и равномерен и что все условия в граничных точках не меняются во времени.

При сделанных предположениях Доббинс [2] ввел следующее дифференциальное уравнение относительно БПК и РК:

$$\begin{aligned} u \frac{dl}{dt} - (k_1 + k_3)l(t) &= 0, \\ -u \frac{dc}{dt} + k_2[c_s - c(t)] - k_1(t)l(t) - d_B &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

где t – расстояние вниз по течению от источника загрязнения, $l(t)$ – (первая ступень) БПК в промиллях на расстоянии t , u – средняя скорость потока, c_s – концентрация

насыщения растворенного кислорода; $c(t)$ – концентрация растворенного кислорода в промилях на расстоянии t вниз по потоку от источника загрязнения на расстояние t . Начальные условия для (1) таковы $l(0) = l_0$, $c(0) = c_0$.

Все работы, посвященные вопросам применения и дальнейшего усовершенствования системы уравнений Стритера – Фелпса, можно условно разделить на три группы, в которых проводились следующие исследования: калибровка параметров исходной системы; модификация уравнений за счет введения новых членов уравнения и новых параметрических констант, позволяющих учитывать новые процессы (дисперсию загрязняющего вещества, адсорбцию/десорбцию, фотосинтез, приток диффузных загрязняющих веществ и т.д.), а также за счет увеличения количества переменных и, соответственно количества уравнений в системе; калибровка параметров модифицированных уравнений в предположении, что параметры являются функциями других характеристик потока (скорости и глубины потока, температуры воды и др.).

Однако во всех модификациях сохраняется главное свойство исходной системы Стритера – Фелпса, а именно: отсутствие обратной связи между концентрацией РК и концентрацией органических веществ ОВ. Следует отметить, что этот недостаток оказался одновременно и достоинством, поскольку отсутствие обратной связи позволяло получить аналитическое решение как исходной системы, так и ее модификации. Сама система вырожденная, именно поэтому решение системы сводится к последовательному

интегрированию двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Более того, возможность последовательного аналитического интегрирования системы сохраняется и для некоторых частных случаев нелинейных зависимостей, например, при

$$\frac{dL}{dt} = -k_1 L^n, \quad n \neq 1.$$

Незамкнутость системы позволяет использовать в некоторых задачах только первое уравнение системы, причем для расчета не только концентрации органики, но и других загрязняющих веществ ЗВ. В то же время отсутствие обратной связи между скоростью окисления ОВ и концентрацией РК может привести к физически некорректным решениям, в которых дефицит кислорода РК превышает концентрацию насыщения и, следовательно, концентрация РК становится отрицательной величиной.

Поставленную задачу можно рассматривать в более общей постановке. Задана система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) относительно состояния реального объекта (системы) и его эволюции во времени.

$$\frac{dz}{dt} = g(t, z(t), u(t)), \quad (3)$$

Подобная постановка задачи охватывает как математические модели различных систем (физических, химических, биологических, технических и т.д.), находящиеся под влиянием возмущающих факторов, так и системы управления по определенным критериям в условиях неопределенности. Для решения этих задач предлагается класс ме-

тодов, основанный на преобразовании символьных формул приближенных решений.

Символьная формула (аналитическое выражение) – запись имен констант, переменных и действий, которые нужно проделать в определенном порядке над значениями этих переменных.

При записи символьных формул, аппроксимирующих оператор сдвига вдоль траектории, допускается включение в них числовых констант, с отложенным выполнением действий с ними.

В общем случае для описываемого класса методов предлагается модель вычислений (преобразований и вычислений) символьных формул, основанная на поэтапном статичном хранении информации и преобразовании ее в завершающей стадии метода. Таким образом, формула будет представлять рекурсивную структуру, размер которой изменяется.

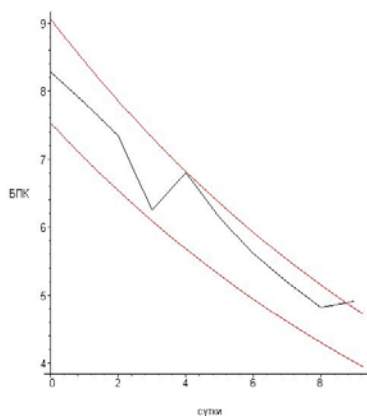


Рисунок 2. Границы показателя БПК 2007 г. май в районе Творогово, Енисей

ЛИТЕРАТУРА

1. Streeter H., Phelps E. A study of the population and natural purification of the Ohio river. Bulletin № 146. U.S. Public Health Service. 1925.
2. Dobbins W. BOD and oxygen relationships in stream. Journal of the Sanitary Engineering Division. 1964. V.90, № SA3. p. 53-78.
3. Padgett W., Schultz G., Tsokos C. A random differential equation approach to the probability distribution of BOD and DO in streams. SIAM J.Appl. Math. 1977. v.32. p. 467-483.
4. Padgett W. A stream pollution model with random deoxygenation and reaeration coefficients. Mathematical Biosciences. 1978. v.42. p. 137-148.
5. Готовцев А.В. Модификация системы Стритера – Фелпса с целью учета обратной связи между концентрацией растворенного кислорода и скоростью окисления органического вещества. Водные ресурсы . 2010. Т.37, №2. С.250-256.
6. Пряжинская В.Г., Ярошевский Д.М., Левит-Гуревич Л.К. Компьютерное моделирование в управлении водными ресурсами. М: Физмалит. 2002.

DETERMINISTIC AND STOCHASTIC METHODS FOR ESTIMATING OF WATER QUALITY

UNDER UNCERTAINTY

Rogalyov A.N.

Institute of Computational Modelling of the Siberian
Branch of the Russian Academy of Sciences
Krasnoyarsk

Due to the discharge of excessive numbers of industrial and sewage of waste, the study of water pollution has become a serious problem. Constant monitoring of water quality is necessary in order to monitor compliance with the standards. You need to set certain limits to water quality parameters. Most often to determine the extent of pollution flows used biochemical oxygen demand (BOD) and dissolved oxygen (DO). The knowledge of the appropriate DO concentration in the addition to organic wastes is important to select the concentration of dissolved oxygen to support aquatic life. Therefore, a realistic and viable development of mathematical models to predict the concentrations of BOD and DO at points downstream from a waste source.

We consider the use of various methods of evaluation of quality parameters of water flows. It is noted that in many cases effective approach based on the character formula for the solution of differential equations and to the computation of areas.

Key words: mathematical models for assessing water quality, dissolved oxygen, biochemical oxygen demand, guaranteed bounds of solutions.