

## МОДЕЛИ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО РАЗРЫВА ПЛАСТА И ЦИРКУЛЯЦИИ КРОВИ В МОЗГЕ НА ОСНОВЕ МЕХАНИКИ И ФИЛЬТРАЦИИ В ГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕДАХ

В.И. Пеньковский, Н.К. Корсакова

*Институт гидродинамики им. ак. Лаврентьева СО РАН 630090, Новосибирск, РФ*

**Аннотация.** Рассматривается фильтрация однородной жидкости в гетерогенной среде, состоящей из вложенных друг в друга континуумов. Процесс движения подчиняется закону Дарси, а потоки жидкости между континуумами пропорциональны разности давления. На основе этих предположений строятся математические модели гидравлического разрыва пласта (ГРП) и процесса замкнутой циркуляции крови в мозге человека. Приводятся некоторые аналитические решения и результаты расчетов, выполненных методом конечных элементов.

**Основные уравнения и постановки задач.** Физико-химические процессы, протекающие в гетерогенных средах, зависят от характера распределения размеров пор в континуумах. Обычно моды распределений пор во вложенных средах, по крайней мере, на порядок отличаются друг от друга. Поэтому пористость сред, как момент второго порядка от функции распределения размеров пор, и проницаемость, как момент четвертого порядка, существенно отличаются друг от друга. Процесс фильтрации однородной жидкости, который происходит в обоих континуумах 1, 2, подчиняется закону движения Дарси [1]:

$$v_i = -\frac{k_i}{\mu} \text{grad} p_i \quad (i=1,2) \quad (1)$$

где  $v_i$ ,  $p_i$ ,  $k_i$ ,  $\mu$  — скорость, давление, проницаемость сред и вязкость флюида, и закону сохранения массы

$$\frac{\partial(m_i \rho)}{\partial t} + \text{div}(\rho v_i) + q_i = 0. \quad (2)$$

В этом уравнении  $m_i$ ,  $\rho$ ,  $t$ ,  $q_i$  — пористость, плотность жидкости, время и плотность источников или стоков, действующих в каждой из сред.

Если в среде 1 или 2 нет иных внешних источников или стоков, то должно быть выполнено условие обмена объемом перетекающей жидкости  $q_2 = -q_1 = q$ . Основанная на законах (1) и (2), система уравнений имеет вид [2]:

$$\frac{k_i}{\mu} \Delta p_i = \beta_i \frac{\partial p_i}{\partial t} + q_i \quad (i=1,2) \quad (3)$$

Здесь  $\beta_i = dm_i / dp_i$  — коэффициенты сжимаемости порового пространства вложенных сред, а величина  $q$  определяется по формуле

$$q = \frac{\alpha}{\mu} (p_1 - p_2),$$

где  $\alpha$  — параметр, характеризующий внутренний обмен в гетерогенной среде.

**Упруго-фильтрационная модель ГРП.** Гидравлический разрыв пласта происходит в случае, когда величина разности давления в пласте и начального давления  $p - p_0$  достигает критического значения  $p_* - p_0$ . Если давление флюида в скважине,  $p_w > p_*$ , то в

кольцевой области  $r_* \geq r \geq r_w$  образуется система трещин, и однородная среда превратится в гетерогенную. В процессе осуществления ГРП внешняя граница области  $r = r_*(t)$  растрескивания может расширяться с течением времени  $t$ . На этой границе давление жидкости  $p(r_*) = p_*$  можно считать постоянным. В процессе гидравлического разрыва образуются три континуума, в которых движется жидкость: вложенные друг в друга континуум 1 — системы трещин и континуум 2 — системы «блоков», состоящих из измененной породы, а также континуум 3 — часть не подвергшегося растрескиванию пласта. Величины пористости в каждой из областей вычисляются в соответствии с формулой упругой деформации при объемном растяжении порового пространства континуумов. При этом необходимо учитывать условие совместности деформаций поровых пространств. Оно имеет вид  $dm_2 = -dm_1$ . Математическую модель ГРП составляет система уравнений: пьезопроводности во внешней однородной области (континуум 3), два уравнения (3) фильтрации в гетерогенной трещиновато-пористой среде, начальные условия  $t = 0, p_3 = p_0, r_* = r_w$ , условия на границах  $p_1(r_w) = p_2(r_w) = p_w, r \rightarrow \infty, p_3 \rightarrow p_0$  и условия сопряжения  $r = r_*(t); v_3 = v_0, p_2(r_*) = p_3(r_*) = p_*$ .

Нижние индексы соответствуют номеру континуума. Поскольку проницаемость трещин (континуум 1) гораздо выше проницаемости блоков (континуум 2), а упругоэластичность блоков выше упругоэластичности трещин, то система уравнений (3) упрощается до системы вида

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} - \eta \frac{\partial}{\partial \tau} (\Delta p) = \Delta p, p_2 = p - \eta \Delta p.$$
 Здесь индекс 1 опущен,  $\tau = tk_1 / (\mu\beta_2)$ ,  $\eta = k_1 / \alpha$  — безразмерные время и параметр обмена. В случае стационарного движения (процесс ГРП окончен) [3] с контуром питания пласта  $r = r_0$  можно получить простую инженерную формулу для определения глубины зоны растрескивания. Она имеет вид  $r_* = r_w (r_0 / r_w)^\gamma$ , где  $\gamma = (p_w - p_*) / (p_w - p_0)$ . Как показывает анализ, степень раскрытия трещин не является монотонной функцией с максимумом, расположенным на определенном расстоянии от скважины ГРП. Примем, например,  $p_w = 50$  МПа,  $p_* = 35$  МПа,  $p_0 = 25$  МПа,  $r_0 = 300$  м,  $r_w = 0,125$ . Из полученной формулы найдем  $r_* = 13,32$  м.

**Модель циркуляции крови в мозге.** В системе кровообращения мозга средний диаметр артерий или вен (континуум 1) значительно больше среднего диаметра разветвленной сети мелких капилляров (континуум 2). Артериальная кровь переходит в венозную через сеть капилляров, являющихся своеобразным реактором, обеспечивающим питание и очистку клеток мозга. Сеть артерий в здоровом организме напрямую не пересекается с сетью вен. Таким образом, в общем случае необходимо учитывать взаимодействие трех взаимодействующих континуумов (см.рис.1). Здесь рассмотрим математическую модель замкнутой циркуляции крови в артериях (давление  $p_a$ ) и венах (давление  $p_v$ ).

В случае одномерного движения система уравнений (3) приводится к виду

$$-\beta_1 \frac{\partial S^+}{\partial t} + \Delta S^+ = 0; \quad -\beta_1 \frac{\partial S^-}{\partial t} + \Delta S^- - 2\eta_1 S^- = 0; \quad (S^\pm(x, t) = p_a \pm p_v) \quad (4)$$

Краевые условия для периодического по времени решения имеют вид

$$x = 0: S^\pm = A^\pm = A \cos \omega t + B^\pm; \quad x = l: \partial S^\pm / \partial x = 0; \quad (B^\pm = B \pm p_0) \quad (5)$$

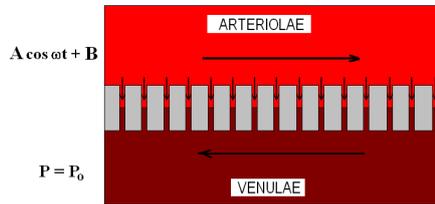


Рис. 1 Схема взаимодействия сети кровеносных сосудов.

Анализ полученного аналитического периодического решения краевой задачи (4),(5) показывает, что существует ограниченная область безопасного для организма человека значений параметров, характеризующих эластичность сосудов и степень проводимости сети капилляров (параметр обмена объемами крови). Здесь решение не приводится ввиду его громоздкости. На рисунке 2 приводится картина распределения давления крови, полученная решением плоской задачи для системы (4),(5) методом конечных элементов для области движения, соответствующей реальной форме человеческого мозга.

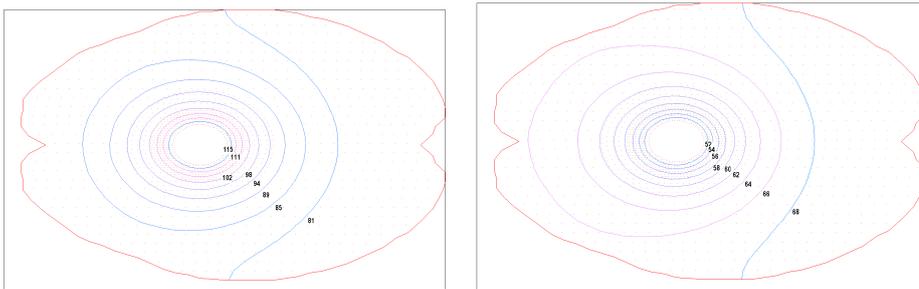


Рис.2 Распределение крови в артериях (слева) и венах (справа).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: «Наука», 1977.
2. Рубинштейн Л.И. К вопросу о распространении тепла в гетерогенных средах. // Изв. АН СССР. Сер. Географ. 1948. Т.12, №1. С. 27-45.
3. Желтов Ю.П. Механика нефтегазоносного пласта. М.: «Недра», 1975, 216 с.