УДК 519.63

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО - РАЗНОСТНЫХ СХЕМ[1]

В.А. Коробицын

Томский государственный университет.

Методом базисных операторов построены согласованные осесимметричные разностные аппроксимации дифференциальных операторов векторного и тензорного анализа в криволинейных координатах. Они получены как преобразование базисных аппроксимаций в осесимметричной прямоугольной системе. Такой подход конструирует осесимметричные полносью консервативные дифференциально - разностные схемы механики сплошной среды в переменных Лагранжа, у которых законы сохранения соответствуют непрерывному случаю и сохраняются сферические симметрии решений.

1. Настоящая работа находится в русле идей наиболее полного отражения численной схемой дифференциальной модели исследуемого явления. Конструирование эффективных разностных схем, основанное на требовании наследования широкого спектра свойств аппроксимируемой системы дифференциальных уравнений в частных производных, достигло существенных результатов. Данная работа открывает подход к конструированию эффективных разностных схем в криволинейных координатах основываясь на разностной схеме в в декартовой системе координат. Такое развитие численного анализа основано на идее Ю.И. Шокина и Н.Н. Яненко [1] «о преобразовании разностных схем (при преобразовании координат) хорошо зарекомендовавших себя в декартовой системе координат». Основное преимущество этого пути заключается в возможности использования в криволинейных координатах работоспособных, полностью консервативных разностных схем в прямоугольных координатах.

Задача состоит в том чтобы, применяя эквивалентные пространственные преобразования, воспроизвести в криволинейных координатах (q_1, q_2) разностные схемы, сохранив имеющиеся законы сохранения и другие полезные свойства родительской схемы. Эта идея реализуется с помощью метода базисных операторов [2], [3]. Дискретные операции векторного и тензорного анализа строятся на основе дискретного элемента площади ячейки. В [2], [3] элемент площади ячейки в

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ №)

криволинейных координатах представляется в форме произведения аппроксимации функций Ламе на аппроксимацию элемента $dq_1 dq_2$.

В настоящей заметке дискретный элемент площади ячейки определяется в прямоугольных координатах и при переходе к криволинейным координатам преобразуется эквивалентным образом. Рассмотрены преобразования согласованных дискретных аппроксимаций первых производных по пространственным переменным, при переходе от осесимметричной прямоугольной системы координат к произвольной осесимметричной криволинейной ортогональной системе. Преобразованные аппроксимации первых производных, в рамках метода базисных операторов, приводят к формализованной системе дискретных операций векторного и тензорного анализа произвольного порядка аппроксимации для широкого класса косоугольных сеток. Устанавливается возможность сохранения, у этих дискретных операций, симметрий присущих системам координат.

Эти результаты применяются для конструирования полностью консервативных дифференциально-разностных схем газовой динамики в лагранжевых переменных. Построена осесимметричная, полностью консервативная разностная схема, сохраняющая сферическую, эллипсоидальную и пр., симметрию течений.

2. Будем рассматривать аппроксимацию на плоскости системы дискретных операций векторного и тензорного анализа для широкого класса косоугольных лагранжевых сеток. В области Q осесимметричных декартовых прямоугольных координат $(x_1, x_2) \equiv (r, z)$, как эйлеровых переменных, обычным образом вводятся невырожденные косоугольные подвижные сетки Ω_h, ω_h: ячеек $\Omega \in \Omega_h$ и узлов $\omega \in \omega_h$, топологически эквивалентные прямоугольным сеткам ячеек и узлов в прямоугольнике [4] $Q^0 \in \mathbf{R}^2(a^1, a^2)$.$\Gamma_h$ – граничные узлы сетки ω_h. Для аппроксимации разностных производных в окрестности граничных узлов считаем, что сетки соответствующим образом продолжены за пределы граничных узлов, а значения функций экстраполированы на это продолжение с учетом граничных условий и порядка аппроксимации.

С каждой ячейкой свяжем узлы, которые геометрически примыкают к ячейке, и участвуют в аппроксимации производной первого порядка со значением в ячейке. Соответственно каждому узлу соответствуют ячейки, которые участвуют в аппроксимации производной первого порядка со значением в узле. Зафиксируем шаблон узлов $\omega(\Omega) \subset \omega_h$ ячейки $\Omega \in \Omega_h$, как подмножество узлов участвующих в задании дискретного (разностного) линейного оператора производной первого порядка

$\nabla_{\Omega i}$ в этой ячейке. Шаблоны узлов порождают согласованные шаблоны ячеек $\Omega(\omega)\subset\Omega_h$, как однородное подмножество ячеек, связанных с узлом $\omega\in\omega_h$, участвующих в задании разностного линейного оператора производной первого порядка $\nabla_{\omega i}$ в этом узле. Пусть геометрическое соседство совпадает с аппроксимационным, так что сетки согласованы посредством шаблонов разностных операторов. Характерный пример таких сеток – шахматные сетки узлов и центров ячеек. Аппроксимация площади каждой ячейки определяется формулой $S_\Omega = S_\Omega(x_1,x_2),\ (x_1,x_2)\in\omega(\Omega)$ на шаблоне ячейки, аналогично для узла $S_\omega = S_\omega(x_1,x_2),\ (x_1,x_2)\in\Omega(\omega)$. Множество сеточных функций будем обозначать символами H_ω, H_Ω , индекс задает область определения: в узлах или ячейках. Множества векторных сеточных функций на соответствующих сетках обозначаем $\mathbf{H}_\omega,\mathbf{H}_\Omega$. Стандартным образом вводится скалярное произведение $\mathbf{W}\cdot\mathbf{U} = W_{x_1}U_{x_1} + W_{x_2}U_{x_2}\in H_\omega$ двух дискретных векторов $\mathbf{W}=\{W_{x_1},W_{x_2}\}\in\mathbf{H}_\omega,\mathbf{U}\in\mathbf{H}_\omega$,

Таким образом, введенные согласованные сетки порождают дискретные операторы первых производных $\nabla_{\Omega i}:H_\omega\to H_\Omega;\nabla_{\omega i}:H_\Omega\to H_\omega,\ i=1,2$, связанные между собой условием согласования в виде формулы суммирования по частям [2-4]

$$\sum_{\Omega_h'} S_\Omega \varphi \nabla_{\Omega i}\psi + \sum_{\omega_h'} S_\omega \psi \nabla_{\omega i}\varphi = \sum_{\Gamma_h'} \langle \psi\varphi\nu_i l\rangle_0,\ i=1,2. \qquad (1)$$

здесь $\Omega_h'\subseteq\Omega_h,\omega_h'\subseteq\omega_h$- произвольные связные согласованные сеточные подобласти, Γ_h'- соответствующие им граничные узлы, ν_i, l- аппроксимация компоненты внешней нормали и длины граничного элемента, $\langle\cdot\rangle$ оператор усреднения на граничном элементе. Формула (1) является аналогом формулы интегрирования по частям

$$\iint_Q dQ\varphi\partial\psi/\partial x_i + \iint_Q dQ\psi\partial\varphi/\partial x_i = \oint_{\partial Q}\varphi\psi\nu_i ds,\ i=1,2.$$

Дискретные операторы имеют представление

$$\nabla_{\Omega i}\psi = S_\Omega^{-1}\sum_{\omega(\Omega)}\tfrac{\partial S_\Omega}{\partial x_{i_\omega}}\psi_\omega, H_\omega\to H_\Omega,\ \nabla_{\omega i}\varphi = -S_\omega^{-1}\sum_{\Omega(\omega)}\tfrac{\partial S_\Omega}{\partial x_{i_\omega}}\varphi_\Omega, H_\Omega\to H_\omega \quad , \quad (2)$$

основанное на инвариантном выражении площади ячейки S_Ω, и удовлетворяют необходимому условию аппроксимации. Операторы (2) действуют в пространствах сеточных функций $H_\omega,H_\Omega,\mathbf{H}_\omega,\mathbf{H}_\Omega$ заданных на сетках на плоскости, и аппроксимируют дифференциальные операторы $\partial/\partial x_i$.

3. Расширим размерность пространств, в которых действуют эти операторы: функции из пространств $H_\omega, H_\Omega, \mathbf{H}_\omega, \mathbf{H}_\Omega : H \equiv H(x_1, x_2)$, которые первоначально определены на плоскости, расширим на третье измерение с условием осесимметричности рассматриваемых функций из этих пространств. При этом изменится мера пространства, в качестве которой выступит объем пространственной ячейки, полученный вращением плоской ячейки площадью S вокруг оси симметрии x_2 на угол в один радиан. Объем ячейки V раствором в один радиан аппроксимируем формулой $V_\Omega = S_\Omega r_\Omega$ - произведением площади $S_\Omega(x_1, x_2)$ ячейки на осесимметричную функцию радиуса центра ячейки $r_\Omega \equiv x_1, r_\Omega \in H_\Omega(x_1, x_2) \equiv H_\Omega(r, z)$. Осесимметричный линейный дискретный оператор дивергенции зададим с помощью соотношения $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t = VDIV\mathbf{W} \equiv V(D_1 W_r + D_2 W_z), \{W_r, W_z\} \equiv \mathbf{W} = \mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t, \mathbf{r} \equiv \{r, z\}$. При конкретном задании радиуса ячейки [2] $r_\Omega = \lambda \nabla_{\Omega 1} r^2/2 + (1-\lambda)\nabla_{\Omega 2} rz$, этот оператор приобретает вид

$$D_i \psi = V_\Omega^{-1} \sum_{\omega(\Omega)} \tfrac{\partial V_\Omega}{\partial x_{i_\omega}} \psi_\omega, H_\omega \to H_\Omega, i = 1,2 \quad , \tag{3}$$

а дискретный оператор

$$G_i \varphi = -V_\omega^{-1} \sum_{\Omega(\omega)} \tfrac{\partial V_\Omega}{\partial x_{i_\omega}} \varphi_\Omega, H_\Omega \to H_\omega \tag{4}$$

согласован посредством формулы суммирования по частям

$$\sum_{\Omega'_h} V_\Omega \varphi D_j \psi + \sum_{\omega'_h} V_\omega \psi G_j \varphi = \sum_{\Gamma_h} \left\langle \psi \varphi \nu_j l \right\rangle_1, \; j = 1,2; \tag{5}$$

Соотношения (1)-(5), вместе с сеточными кривыми, поверхностями, пространствами, дискретными операторами D_i, G_i, определяют начала дискретной геометрии цилиндрического пространства, являясь также аппроксимацией соответствующих элементов непрерывных геометрических построений. И помимо аппроксимации, необходима сходимость дискретных элементов к непрерывным элементам на последовательности невырожденных сгущающихся сеток.

4. Пусть система осесимметричных ортогональных криволинейных координат (q_1, q_2) на плоскости меридионального сечения (r, z) задана обратимым преобразованием $q_i = q_i(r, z), i = 1,2$. Ставим задачу перехода от осесимметричной прямоугольной системы координат к произвольной осесимметричной криволинейной ортогональной системе.

Запишем производную по времени $dV_\Omega / dt = \sum\limits_{\omega(\Omega)} \frac{\partial V}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta = V_\Omega D_\alpha \left(A_\beta^{-1} W_\beta \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_\beta} \right)$. Здесь $W_{x_\alpha} = A_\beta^{-1} W_\beta \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_\beta}, W_i = A_i \dot{q}_i$ - физическая компонента вектора $\mathbf{W}$ скорости материального узла $\omega \in \omega_h$. $A_i \in H_\omega$, $\widetilde{A}_i \in H_\Omega$- аппроксимации функций Ламе $H_i, i = 1,2; H_1' = H_2, H_2' = H_1$. (Суммирование по повторяющемуся греческому индексу $\alpha, \beta, ... = 1,2$). Оператор $D_{q_i}^k W_i = D_\beta \left(A_i^{-1} W_i \,\partial x_\beta / \partial q_i \right), (i = 1,2;)$ - дискретный аналог на сетке Ω_h дифференциального оператора $(H_1 H_2)^{-1} \partial (H_i' W_i) / \partial q_i$ в переменных q_i: $D_{q_\alpha}^k W_\alpha = \mathrm{DIV}\,\mathbf{W}$. Введем оператор $G_{q_i}^k = H_i^{-1} \partial / \partial q_i + O(h^N)$, согласованный с оператором $D_{q_i}^k$ в соответствии с формулой суммирования по частям, для чего в (5) заменим ψ на $A_i^{-1} W_i \,\partial x_j / \partial q_i$, полученные соотношения при $j = 1,2$ сложим. Получим

$$\sum_{\Omega_h'} V_\Omega \varphi D_{q_i}^k W_i + \sum_{\omega_h'} V_\omega W_i G_{q_i}^k \varphi = \sum_{\Gamma_h} \left\langle \varphi W_i \nu_\beta \left(\partial x_\beta / \partial q_i \right) A_i^{-1} l \right\rangle_1, \; i = 1,2. \tag{6}$$

где оператор $G_{q_i}^k \varphi = A_i^{-1} \partial x_\alpha / \partial q_i \, G_\alpha \varphi$. Такая запись преобразования компонент вектора объявляет, что это физические компоненты вектора $\mathbf{GRAD}\,\varphi = \left\{ G_{q_1}^k \varphi, G_{q_2}^k \varphi \right\}$, как, впрочем, и аппроксимация вектора внешней нормали. Соотношения (6) сложим с $i = 1,2$. Результатом будет соотношение в векторной записи, подтверждающее инвариантный вид и согласованность операторов $\mathrm{DIV}, \mathbf{GRAD}$

$$\sum_{\Omega_h} V_\Omega \varphi \,\mathrm{DIV}\,\mathbf{W} + \sum_{\omega_h} V_\omega \mathbf{W} \cdot \mathbf{GRAD}\,\varphi = \sum_{\Gamma_h} \left\langle \varphi \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\nu} l \right\rangle_1 .$$

5. Построенные базисные дискретные осесимметричные операторы $D_i, G_i, D_i^k, G_i^k \varphi$, определяют векторные и тензорные операторы на двумерных косоугольных сетках для осесимметричных систем криволинейных координат. Для них выполняются квадратурные аналоги интегральных соотношений теорем Грина, Остроградского-Гаусса, Стокса, которые служат подтверждением сохранения у тензорных разностных операторов таких важных свойств как сопряженность и самосопряженность, знакоопределенность. Эти дискретные векторные и тензорные операторы для локальных осесимметричных систем криволинейных координат и квадратурные аналоги интегральных соотношений определяются аналогично [2], через операторы D_i, G_i, D_i^k, G_i^k. Но конструируются последние операторы по различным формулам.

6. Построена, в криволинейных ортогональных координатах, осесимметричная, полностью консервативная дифференциально-разностная 2D схема газовой динамики в лагранжевых переменных, как точный образ схемы в прямоугольной системе координат. Для более полного отражения разностной схемой дифференциальной модели исследуемого явления численный алгоритм должен воспроизводить симметрии, присущие дифференциальной системе уравнений, а именно симметрии решений относительно прямых, кривых, плоскостей и поверхностей. Чтобы двумерная разностная схема воспроизводила одномерный характер течений дискретной среды, необходимо, чтобы дискретные операторы, применяемые в схеме, сохраняли одномерность. Рассматривая поведение операторов $G_i^k \varphi$ на осесимметричной сферической сетке, нетрудно установить, что граничное условие непротекания реализуется путем достройки фиктивных граничных ячеек и продолжения в них сеточных функций. Этот факт показывает возможность выполнения осесимметричными дискретными 2D операторами условий одномерности течений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шокин Ю.И. Яненко Н.Н. Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1985. 365 с.
2. Коробицын В.А. Осесимметричные разностные операторы в ортогональной системе координат // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т.29, № 11. С.1621-1633.
3. Коробицын В.А. Полностью консервативные осесимметричные разностные схемы в криволинейных ортогональных системах координат// Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т.32, № 5. С.810-815.
4. Коробицын В.А. Законы сохранения в дискретных моделях сплошной среды // Численные методы механики сплошной среды. 1986. т.17, № 4 С .77-101.

ORTHOGONAL TRANSFORMATIONS OF AXISYMMETRIC DIFFERENTIAL - DIFFERENCE SCHEMES

V.A. Korobitsyn