

Об аппроксимации разрывных решений уравнения Баклея-Леверетта*

Ю.М. ЛАЕВСКИЙ

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН
e-mail: laev@labchem.sscs.ru

Т.А. КАНДРЮКОВА

Новосибирский государственный университет
e-mail: kandryukovat@gmail.com

1. Введение

Уравнение Баклея-Леверетта приближенно (без учета силы тяжести и капиллярных сил) описывает процесс вытеснения нефти водой в пористой среде [1]. Оно является простым следствием уравнений неразрывности для каждой из фаз:

$$m \frac{\partial s_i}{\partial t} + \frac{\partial w_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, 2$$

и закона Дарси:

$$w_i = \frac{k}{\mu_i} f_i(s) \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Здесь s_i и w_i – соответственно насыщенности и скорости фильтрации для каждой фазы, $s \equiv s_2 = 1 - s_1$, $f_i(s)$ – относительные фазовые проницаемости, μ_i – динамические вязкости вытесняемой ($i = 1$) и вытесняющей ($i = 2$) фаз, p – давление, m – пористость среды. Из уравнений неразрывности немедленно следует, что $w_1 + w_2 = Q_0$ – заданное число. При этом собственно уравнение Баклея-Леверетта имеет вид гиперболического закона сохранения:

$$m \frac{\partial s}{\partial t} + Q_0 \frac{\partial \phi(s)}{\partial x} = 0, \quad t > 0, \quad x > 0 \quad (1)$$

Здесь

$$\phi(s) = \frac{\mu f_2(s)}{\mu f_2(s) + f_1(s)}, \quad 0 \leq s \leq 1$$

– функция Баклея-Леверетта, $\mu = \mu_1/\mu_2$. Функция $\phi(s)$ непрерывна в $[0,1]$, строго возрастает на интервале $\underline{s} < s < \bar{s}$, $\phi(s) \equiv \phi(\underline{s}) = 0$ на интервале $0 \leq s \leq \underline{s}$, и $\phi(s) \equiv \phi(\bar{s}) = 1$ на интервале $\bar{s} \leq s \leq 1$.

Для уравнения (1.1) ставится начально-краевая задача:

$$s(0, x) = s_0(x), \quad x > 0, \quad s(x, 0) = const, \quad t > 0 \quad (2)$$

Возникновение разрывных решений возможно в случае наличия интервала выпуклости у функции Баклея-Леверетта – интервала, на котором $\phi''(s) > 0$. Разрыв образуется при

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 10-01-00102а).

условии существования интервала $0 \leq x_1 < x < x_2$, на котором функция начальных данных $s_0(x)$ строго убывает и $s_0(x) \in (\underline{s}, s_*)$, где $s_* \in (\underline{s}, \bar{s})$ – точка максимума функции $\phi'(s)$. В этом случае задача имеет одно устойчивое и целое семейство неустойчивых (в смысле [2]) решений.

Еще в 70-х годах прошлого века было замечено [3, 4], что численное решение уравнения Баклея-Леверетта, полученное по схеме Лакса-Вендроффа [5], приближает неустойчивое решение. Тем не менее, ни в этих, ни в других известных нам работах не приведены результаты исследований, обосновывающие этот факт. Дело в том, что поведение решения в фиксированный момент времени еще не доказывает наличие неустойчивого решения. Следовало бы проверить постоянство скорости распространения разрыва, постоянство параметра, отвечающего за выбор конкретного неустойчивого решения из всего семейства и пр. Этому вопросу, в частности, посвящена данная статья. Кроме того, в данной работе численно исследуется вопрос о том, как сеточные параметры влияют на выбор неустойчивого решения. Выяснилось, что этот выбор зависит только от числа Куранта - при различных шагах с одним и тем же числом Куранта воспроизводится одно и то же численное решение. При этом получение неустойчивого решения возможно даже при числах Куранта заметно больших единицы. Этот любопытный факт требует дальнейшего исследования. Все расчеты проведены для хорошо известных тестовых аналитических решений [6], детально описанных в следующем пункте.

2. Аналитические решения уравнения Баклея-Леверетта

Ниже рассматриваются следующие функции фазовых проницаемостей [6]:

$$f_1(s) = \begin{cases} 1, & 0 \leq s \leq \underline{s} \\ \left(\frac{\bar{s}-s}{\bar{s}-\underline{s}}\right)^p, & \underline{s} < s < \bar{s} \\ 0, & \bar{s} \leq s \leq 1 \end{cases} \quad f_2(s) = \begin{cases} 0, & 0 \leq s \leq \underline{s} \\ \left(\frac{s-\underline{s}}{\bar{s}-\underline{s}}\right)^p, & \underline{s} < s < \bar{s} \\ 1, & \bar{s} \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (3)$$

где $p > 1$. Для $p = 3$, $\underline{s} = 0.2$, $\bar{s} = 0.8$ функция Баклея-Леверетта и ее производная в зависимости от параметра μ приведены на рисунках 1 и 2. Характеристики уравнения

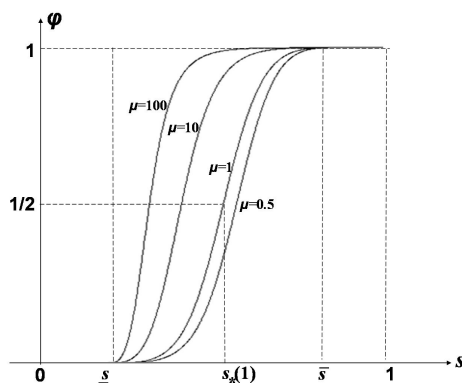


Рис. 1. Функция Баклея-Леверетта

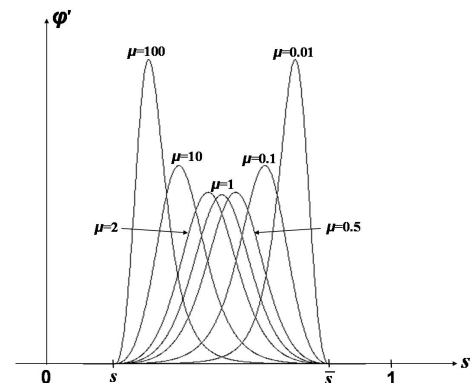


Рис. 2. Производные Функции Баклея-Леверетта

(1) определяются равенством

$$\frac{dx}{dt} = a(s),$$

где

$$a(s) = \frac{Q_0}{m} \phi'(s), \quad \underline{s} < s < \bar{s}.$$

Поле характеристик для поставленной задачи изображено на рисунке 3. Решение задачи имеет вид:

$$s(t, x) = \begin{cases} r(x/t), & 0 < x < Dt \\ \underline{s}, & x > Dt \end{cases} \quad (4)$$

где на интервале монотонного убывания функции Баклея-Леверетта функция $r(\xi)$ однозначно определяется из равенства

$$Q_0 \phi'(r) = m\xi. \quad (5)$$

В случае $p = 3$ и $\mu = 1$ решение этого уравнения может быть выписано в явном виде:

$$r(\xi) = \underline{s} + \frac{2(\bar{s} - \underline{s})\sqrt{\xi}}{\sqrt{3} + 3\sqrt{\xi} - \sqrt{3 + 2\sqrt{3\xi} - 3\xi}},$$

а скорость распространения разрыва есть

$$D = \frac{4}{3} \frac{Q_0}{m(\bar{s} - \underline{s})}.$$

Согласно [2] (стр.448) устойчивый разрыв характеризуется неравенствами

$$\frac{\phi(s) - \phi(\underline{s})}{s - \underline{s}} \leq \frac{mD}{Q_0} \leq \frac{Q_0}{m} \frac{\phi(r(D)) - \phi(s)}{r(D) - s}, \quad (6)$$

имеющих место при любом $s \in (\underline{s}, r(D))$.

Наряду с устойчивым имеется однопараметрическое семейство неустойчивых разрывов. Пусть заданы числа $\lambda \in (0, D)$ и

$$\tilde{D} = \frac{Q_0}{m} \frac{\phi(r(\lambda)) - \phi(\underline{s})}{r(\lambda) - \underline{s}}$$

– скорость распространения неустойчивого разрыва. При этом $\lambda < \tilde{D} < D$. Тогда определено однопараметрическое семейство решений задачи (1), (2):

$$s_\lambda(t, x) = \begin{cases} r(x/t), & 0 < x < \lambda t \\ r(\lambda), & \lambda t < x < \tilde{D}t \\ \underline{s}, & x > \tilde{D}t \end{cases} \quad (7)$$

Соответствующее поле характеристик изображено на рисунке 4. В отличие от (4) функции семейства (7) являются неустойчивыми решениями: по характеристикам $x - \lambda t = const$ решение приносится не из начальных данных, а с линии разрыва $x - \tilde{D}t = 0$. Отметим, что при этом не выполняются условия (6).

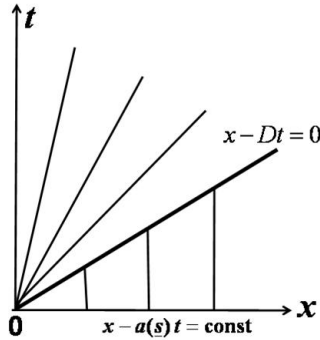


Рис. 3. Поле характеристик

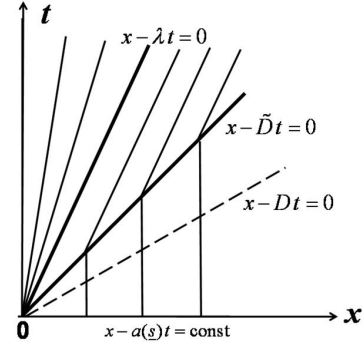


Рис. 4. Поле характеристик неустойчивой задачи

3. Результаты расчетов по схеме Лакса-Вендроффа

Схема Лакса-Вендроффа для задачи (1), (2) имеет вид:

$$m \frac{s_{i-1/2} - 0.5(s_i^n + s_{i-1}^n)}{\tau/2} + Q_0 \frac{\phi(s_i^n) - \phi(s_{i-1}^n)}{h} = 0,$$

$$m \frac{s_i^{n+1} - s_i^n}{\tau} + Q_0 \frac{\phi(s_{i+1/2}) - \phi(s_{i-1/2})}{h} = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

В расчетах будем полагать $\mu = 10$. Точное решение воспроизводится итерационным методом решения нелинейного уравнения (5). На рисунке 5 приведены решение по схеме Лакса-Вендроффа (кривая 1) и устойчивое аналитическое решение (кривая 2) в момент времени $t = 0.3$ при разбиении $M = 1/h = 2048$, $N = 1/\tau = 8192$, что соответствует числу Куранта

$$K = \max_s \phi'(s) \frac{Q_0 \tau}{m h} \approx 0.44$$

Решение, полученное по схеме Лакса-Вендроффа, имеет вид (7). В связи с этим выдвигается гипотеза, что схема Лакса-Вендроффа воспроизводит решение из неустойчивого семейства. Чтобы эту гипотезу подтвердить, нужно показать, что скорость распространения разрыва в этих решениях и значение насыщенности $r(\lambda)$ не зависят от времени. Также будем следить за выполнением условия сохранения баланса: $A = Q$, где

$$A = \int_0^1 (s - \underline{s}) dx, \quad Q = \frac{Q_0}{m} t.$$

В таблице 1 представлены результаты расчетов при $\tau/h = 1/8$ ($K \approx 0.44$). Последняя строчка в таблице 1 отражает моменты выхода решения на полочку постоянного значения, высчитанные по значению $r(\lambda)$ в соответствии с формулой:

$$\xi = \mu p z^{p-1}(r) \left(\frac{1 + z(r)}{\mu + z^p(r)} \right)^2,$$

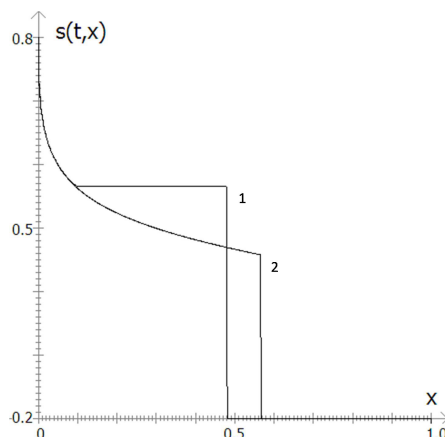


Рис. 5. Решение по схеме Лакса-Вендроффа

где $z(r) = (\bar{s} - r)/(r - \underline{s})$. Соответствующие точки численного решения “стремятся” к вычисленным теоретически с уменьшением шагов сетки. Как видно из таблицы 1, численное решение не зависит от шагов сетки при фиксированном числе Куранта. Уменьшение числа Куранта в 2 раза привело к следующим результатам: значение на полочке равно 0.5760, скорость разрыва колеблется около значения 1.56, баланс сохраняется с той же точностью.

Кроме того, расчеты показали, что условие $K \leq 1$ не гарантирует устойчивость счета по схеме Лакса-Вендроффа. Так, видимые колебания появляются уже при $K \simeq 0.7$ (см. таблицу 2). С другой стороны, при $K > 1$ возможно численное воспроизведение неустойчивого решения. Для $\mu = 10 \max_s \phi'(s) \simeq 5.8693$. Зафиксируем $M = 100$, $t = 0.5$.

Уменьшая N , постепенно будем увеличивать число Куранта. K_1 – наименьшее значение числа Куранта, при котором становятся заметны колебания. При дальнейшем уменьшении N (соответственно, увеличении K) решения по схемам “уголок” и Лакса-Вендроффа, осциллируя, “стремятся” друг к другу. K_2 – наименьшее число Куранта, при котором решения совпадают. Причем полученное решение относится к семейству неустойчивых решений задачи. При соотношении шагов сетки, соответствующем числу Куранта K_1 , в любой момент времени значение на полочке равно 0.4692, а скорость разрыва – примерно 1.88. При $\tau/h = 2/3$ ($K \simeq 2.347$) соответственно 0.5944 и 1.5.

Список литературы

- [1] И.А. ЧАРНЫЙ. Подземная гидрогазодинамика. М.: ГНТИНГТЛ, 1963.
- [2] Б.Л. РОЖДЕСТВЕНСКИЙ, Н.Н. ЯНЕНКО. Системы квазилинейных уравнений. М: Наука, 1968.
- [3] А.В. КОРОЛЕВ, Б.В. ШАЛИМОВ, М.И. ШВИДЛЕР. О некоторых разностных схемах решения задачи Баклея-Левретта // В сб. "Численные методы решения задач фильтрации несжимаемой жидкости". 1975. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР. С. 137–154.
- [4] Б.И. ЛЕВИ, Я.М. ЗАЙДЕЛЬ, А.Г. ШАХМАЕВА, Ю.В. СУРКОВ. О некоторых разностных схемах для решения задач двухфазной фильтрации несмешивающихся жидкостей // В сб. "Численные методы решения задач фильтрации несжимаемой жидкости". 1975. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР. С. 137–154.

$M \times N$	$t=0.2$	$t=0.3$	$t=0.4$	$t=0.5$	
32×256	0.5656	0.5657	0.5657	0.5657	$r(\lambda)$
	1.5386	1.5582	1.6311	1.6250	\widetilde{D}
	0.00907	0.00905	0.00903	0.00901	$A - Q$
64×512	0.5657	0.5657	0.5657	0.5657	$r(\lambda)$
	1.6307	1.6103	1.5999	1.5936	\widetilde{D}
	0.00451	0.00450	0.00449	0.00448	$A - Q$
128×1024	0.5657	0.5657	0.5657	0.5657	$r(\lambda)$
	1.5999	1.6103	1.5999	1.5938	\widetilde{D}
	0.00225	0.00224	0.00223	0.00223	$A - Q$
256×2048	0.5657	0.5657	0.5657	0.5657	$r(\lambda)$
	1.5999	1.5997	1.5999	1.6016	\widetilde{D}
	0.00112	0.00111	0.00111	0.00111	$A - Q$
512×4096	0.5657	0.5657	0.5657	0.5657	$r(\lambda)$
	1.5999	1.6013	1.6010	1.5976	\widetilde{D}
	0.00056	0.00056	0.00056	0.00055	$A - Q$
1024×8192	0.5657	0.5657	0.5657	0.5657	$r(\lambda)$
	1.6015	1.5980	1.5990	1.5996	\widetilde{D}
	0.00028	0.00028	0.00028	0.00027	$A - Q$
	0.0629	0.0944	0.1258	0.1573	λt

Таблица 1.

Q_0/m	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
N_1	179	255	341	425	510
$(\tau/h)_1$	0.5587	0.392	0.293	0.235	0.196
K_1	0.656	0.690	0.688	0.690	0.690
N_2	62	94	125	157	188
$(\tau/h)_2$	1.613	1.064	0.4	0.637	0.532
K_2	1.893	1.873	1.878	1.869	1.873

Таблица 2.

- [5] Р. РИХТМАЙЕР, К. МОРТОН. Разностные методы решения краевых задач. Москва, Мир, 1972.
- [6] А.Н. КОНОВАЛОВ. Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. Новосибирск: Наука, 1988.