

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В КОНТРАСТНЫХ СРЕДАХ МНОГОМАСШТАБНЫМ РАЗРЫВНЫМ МЕТОДОМ ГАЛЕРКИНА

Н.Б.Иткина, Е.Н.Сукманова, Э.П.Шурина

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск

SOLVING OF HEATCONDUCTION PROBLEMS IN DOMAIN WITH CONTRAST PROPERTIES BY MULTISCALE DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD

N.B.Itkina, E.N.Sukmanova, E.P.Shurina

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk

Discontinuous Galerkin method is efficient for solving multi-physics or multi-material problem, where different physical models (and, thus, different numerical methods) are applied in different parts of computational domain. Original computational scheme is offered for solving diffusion problems in multi-material domain. This scheme is based on local properties of discontinuous Galerkin (DG) method with coupling of continuous Galerkin (CG) method.

Введение

Актуальные в данный момент задачи исследования свойств композитных материалов (разработка новых материалов и технологий); процессов, протекающих в пористых средах (задачи эксплуатации нефтяных месторождений); турбулентных течений с высокими числами Рейнольдса (задачи оптимизации и конструирования летательных аппаратов); проблемы движения грунтовых вод; нанотехнологии т.д. - все эти проблемы относятся к классу многомасштабных задач. В последние десять лет для решения многофизических и многомасштабных задач все чаще используется разрывный метод Галеркина (DG-метод) [1]. Преимущества DG-метода: 1) локальность позволяет естественно использовать стратегию p - h -refinement и 2) неконформность обеспечивает преимущества при работе с несогласованными сетками. К недостаткам DG-метода можно отнести: 1) значительное увеличение степеней свободы по сравнению с CG-методом на элементах одного порядка и 2) усложнение вариационных постановок. Первая проблема, связанная с резким ростом размерности системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) решается за счет использования многомасштабных вариационных постановок [2] или применения многоуровневых решателей [3]. Гибкость многомасштабного разрывного метода Галеркина (MDG) позволяет построить вычислительную схему, максимально адекватную физической задаче.

В работе предлагается оригинальная вычислительная схема, построенная на базе многомасштабного разрывного метода Галеркина с использованием технологии непрерывного метода Галеркина и специальный многоуровневый решатель, учитывающий особенности дискретной системы уравнений. Работа состоит из следующих частей: вариационная постановка DG-метода для эллиптической задачи; декомпозиция пространства решений – многомасштабная вариационная постановка; структура дискретного аналога – многоуровневый решатель; результаты вычислительных экспериментов на классе модельных задач, демонстрирующие возможности применения MDG-метода.

Вариационная постановка

Рассмотрим модельную эллиптическую краевую задачу

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} u) &= f \quad \text{на } \Omega \\ u &= g_D \quad \text{на } \partial\Omega \end{aligned} \quad (1)$$

Перейдем к системе уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \sigma - \nabla u &= 0 \\ -\nabla \cdot (\lambda \sigma) &= f \quad \text{на } \Omega \end{aligned} \quad (2)$$

Определим триангуляцию области $\Omega: \Xi_h = \{K\}$, где K - конечные элементы. Обозначим границу конечного элемента $K: \partial K$. Тогда $\Gamma = \bigcup_{K \in \Xi} \partial K$ - объединение всех границ конечных элементов, $\Gamma^0 = \Gamma \setminus \partial\Omega$ - объединение внутренних границ конечных элементов.

Введем пространство $W_2^l(\Xi_h)$ как пространство функций, заданных на Ω , которые на каждом элементе K принадлежат пространству Соболева $W_2^l(K)$ с нормой

$$\|v\|_{W_2^l(K)} = \left(\sum_{|\gamma| \leq l} \|D^\gamma v\|_{L_2(K)}^2 \right)^{1/2}, \text{ где } L_2(\Omega) \text{ - пространство Лебега со скалярным произведением:}$$

$$(v, w)_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} v w d\Omega \text{ и нормой: } \|v\|_{L_2(\Omega)} = (v, v)_{L_2(\Omega)}^{1/2}.$$

Введем пространства тестовых функций: $V_h = \{v \in L_2(\Omega) : v|_K \in P(K), \forall K \in \Xi_h\}$, $\Sigma_h = \{\tau \in [L_2(\Omega)]^3 : \tau|_K \in \Sigma(K), \forall K \in \Xi_h\}$, где $P(K) = P_p(K)$ - пространство полиномов степени $p \geq 1$, определенных на элементе K ; $\Sigma(K) = [P_p(K)]^3 \cdot V_h$ и Σ_h - подпространства пространств $W_2^l(\Xi_h)$ и $[W_2^l(\Xi_h)]^3$.

След функции $v \in V_h$ на границе конечного элемента $K: \partial K$ определим следующим образом: $v_K^\pm = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v(x \pm \varepsilon n_K)$, где n_K - единичная внешняя нормаль к границе ∂K . След функции $\tau \in \Sigma_h$ определяется аналогично. Определим понятие «среднего» и «скачка» как операторов следа на множествах Γ^0 и $\partial\Omega$. Функции $v \in V_h$ и $\tau \in \Sigma_h$ принимают два различных значения на внутренних границах конечных элементов (на Γ^0).

Введем обозначения: $v_i = v|_{K_i}$, $\tau_i = \tau|_{K_i}$, $n_i = n|_{K_i}$. Зададим оператор среднего $\langle v \rangle = (v_i^- + v_j^-)/2$ на границе $\partial K \in \Gamma^0$, $\langle v \rangle = v_i^-$ на границе $\partial\Omega$, $\langle \tau \rangle = (\tau_i^- + \tau_j^-)/2$ на границе $\partial K \in \Gamma^0$, $\langle \tau \rangle = \tau_i^-$ на границе $\partial\Omega$ и оператор скачка: $[v] = v_i^- n_i + v_j^- n_j$ на границе $\partial K \in \Gamma^0$, $[v] = v_i^- n_i$ на границе $\partial\Omega$, $[\tau] = \tau_i^- \cdot n_i + \tau_j^- \cdot n_j$ на границе $\partial K \in \Gamma^0$, $[\tau] = \tau_i^- \cdot n_i$ на границе $\partial\Omega$, где индексы i и j - соответствуют конечным элементам K_i и K_j , имеющим общую границу ∂K . Скачок $[v]$ - это вектор параллельный нормали; скачок $[\tau]$ - скалярная величина. Следы функций из пространства $W_2^1(\Xi_h)$ (обозначим $H^1(\Xi_h)$) принадлежат множеству $T(\Gamma) = \prod_{K \in \Sigma_h} L_2(\partial K)$, Γ определяет множество границ элементов K триангуляции Ξ_h . Функции из $T(\Gamma)$ двузначны на границе Γ^0 и однозначны на границе $\partial\Omega$. Пространство $L_2(\Gamma)$ можно определить как подпространство $T(\Gamma)$, состоящее из функций, принимающих различные значения на внутренних границах области Ω .

Вариационная формулировка для задачи (2) примет вид [1]

Найти функции $u_h \in V_h$ и $\sigma_h \in \Sigma_h$ такие, что $\forall K \in \Xi_h$ удовлетворяют вариационным уравнениям:

$$\int_K \sigma_h \cdot \tau dx = - \int_K u_h \nabla \cdot \tau dx + \int_{\partial K} u_K n_K \cdot \tau ds \quad \forall \tau \in \Sigma(K); \quad (3)$$

$$\int_K \lambda \sigma_h \cdot \nabla v dx = \int_K f v dx + \int_{\partial K} \lambda \sigma_K \cdot n_K v ds \quad \forall v \in P(K), \quad (4)$$

где величины σ_h и u_h аппроксимируют $\sigma = \nabla u$ и u соответственно, и называются «численными потоками». Определим скалярный численный поток $u = (u_K)_{K \in \Xi_h}$ и векторный численный поток $\sigma = (\sigma_K)_{K \in \Xi_h}$ как линейные функции: $u : H^1(\Xi_h) \rightarrow T(\Gamma)$; $\sigma : H^2(\Xi_h) \times [H^1(\Xi_h)]^3 \rightarrow [T(\Gamma)]^3$. В соответствии с формулой (4) будем считать, что σ_K - вектор ортогональный границе элемента. Заданные таким образом численные потоки должны удовлетворять требованиям: 1) $u(v) = v|_\Gamma$, $\sigma(v, \nabla v) = \nabla v|_\Gamma$, где v - гладкая функция, удовлетворяющая граничным условиям Дирихле; 2) $u(\cdot)$ и $\sigma(\cdot, \cdot)$ однозначны на Γ .

Воспользуемся введенными операторами и выпишем вариационную формулировку для всей области Ω :

$$\int_{\Omega} \sigma_h \cdot \tau dx = - \int_{\Omega} u_h \nabla_h \cdot \tau dx + \sum_{K \in \Xi_h} \int_{\partial K} u_K n_K \cdot \tau ds \quad \forall \tau \in \Sigma_h; \quad (5)$$

$$\int_{\Omega} \lambda \sigma_h \cdot \nabla_h v dx = \int_{\Omega} f v dx + \sum_{K \in \Xi_h} \int_{\partial K} \lambda \sigma_K \cdot n_K v ds \quad \forall v \in V_h, \quad (6)$$

где $\nabla_h v$ и $\nabla_h \cdot \tau$ - функции на каждом конечном элементе $K \in \Xi_h$ аппроксимирующие ∇v и $\nabla \cdot \tau$. Для вычисления сумм вида $\sum_{K \in \Xi_h} \int_{\partial K} q_K \varphi_K \cdot n_K ds$ воспользуемся свойством: $\forall q \in T(\Gamma)$ и $\forall \varphi \in [T(\Gamma)]^3$ выполняется равенство [1]

$$\sum_{K \in \Xi_h} \int_{\partial K} q_K \varphi_K \cdot n_K ds = \int_{\Gamma} [q] \cdot \langle \varphi \rangle ds + \int_{\Gamma^0} \langle q \rangle [\varphi] ds. \quad (7)$$

С учетом (7) формулы (5)-(6) примут вид:

$$\int_{\Omega} \sigma_h \cdot \tau dx = - \int_{\Omega} u_h \nabla_h \cdot \tau dx + \int_{\Gamma} [u] \cdot \langle \tau \rangle ds + \int_{\Gamma^0} \langle u \rangle [\tau] ds \quad \forall \tau \in \Sigma_h; \quad (8)$$

$$\int_{\Omega} \sigma_h \cdot \nabla_h v dx - \int_{\Gamma} \langle \sigma \rangle \cdot [v] ds - \int_{\Gamma^0} [\sigma] \langle v \rangle ds = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in V_h. \quad (9)$$

Определим σ_h как функцию $u_h : \sigma_h = \nabla_h u_h$. В формуле (9) выберем q равное следу v и φ равное следу τ , тогда $\forall \tau \in [H^1(\Xi_h)]^3$ и $\forall v \in H^1(\Xi_h)$, воспользовавшись формулой интегрирования по частям для интеграла в левой части соотношения (8), получаем:

$$- \int_{\Omega} \nabla_h \cdot \tau v dx = \int_{\Omega} \tau \cdot \nabla_h v dx - \int_{\Gamma} \langle \tau \rangle \cdot [v] ds - \int_{\Gamma^0} [\tau] \langle v \rangle ds.$$

Полагая $v = u_h$ и подставив этот результат в правую часть формулы (8), получаем:

$$\int_{\Omega} \sigma_h \cdot \tau dx = \int_{\Omega} \nabla_h u_h \cdot \tau dx + \int_{\Gamma} [u - u_h] \cdot \langle \tau \rangle ds + \int_{\Gamma^0} \langle u - u_h \rangle [\tau] ds \quad \forall \tau \in \Sigma_h. \quad (10)$$

Положим в (9) $\tau = \nabla_h v$ и определим численные потоки в виде: $u = \langle u_h \rangle + n_K \cdot [u_h]$ на Γ^0 , $u = n_K \cdot [u_h - g]$ на $\partial\Omega$; $\sigma = \langle \nabla_h u_h \rangle + \eta_e r([u_h])$ на Γ , где $r([u_h])$ - специальный лифтинг-оператор. Получаем вариационную постановку в форме Bassi [1]:

$$B_h(u_h, v) = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in V_h, \quad (11)$$

$$B_h(u_h, v) = \int_{\Omega} \lambda \nabla_h u_h \cdot \nabla_h v dx - \int_{\Gamma} \lambda ([u_h] \cdot \langle \nabla_h v \rangle + \langle \nabla_h u_h \rangle \cdot [v]) ds + \int_{\Gamma} g n \cdot \nabla_h v ds - \sum_{e \in \Gamma} \eta_e \int_e \lambda \langle r_e([u]) \rangle \cdot [v] ds \quad \forall v \in V_h, \quad (12)$$

Многомасштабная вариационная постановка

Пусть пространство решений V_h представлено в виде прямой суммы подпространств $V_h = V_d \oplus V_c$, где V_d - пространство разрывных функций, V_c - пространство непрерывных функций. В случае разрывного или резкоменяющегося на некоторой подобласти и достаточно гладкого в других подобластях решения имеет смысл представить область моделирования в виде объединения двух подобластей: на одной подобласти определено разрывное решение Ω_d , а на второй Ω_c - непрерывное. Таким образом, разрывная компонента решения определена только в области Ω_d . С учетом представления пространства V_h в виде суммы двух подпространств вариационная постановка (11)-(12) примет вид

$$B_h(u_c, v_c) + B_h(u_d, v_c) = (f, v_c) \forall v_c \in V_c \quad (13)$$

$$B_h(u_c, v_d) + B_h(u_d, v_d) = (f, v_d) \forall v_d \in V_d$$

Для построения дискретного аналога вариационной постановки (13) выберем стандартный кусочно-линейный базис для пространства V_c и разрывный кусочно-линейный базис для пространства V_d . Матрица СЛАУ, в соответствии с соотношением (13) будет иметь блочную структуру. Сконструируем двухуровневый итерационный решатель [3], используя структуру пространства V_h . Пусть $m = \dim V_c$, $n = \dim V_h$, тогда дискретный аналог соотношения (14) – СЛАУ $Ax = b$, где A - матрица размерности $n \times n$. Определим оператор проектирования $P: V_h \rightarrow V_c$. Алгоритм решения СЛАУ примет вид:

1. Начальное приближение x_0 , невязка $r_0 = b - Ax_0$.

2. Для $i = 1, 2, \dots$ вычислить:

$$g = -P^T r_{i-1}$$

$$y = (P^T A P)^{-1} g$$

$$x_{i-\frac{1}{2}} = x_{i-1} + Py$$

$$r_{i-\frac{1}{2}} = b - Ax_{i-\frac{1}{2}}$$

$$z = A^{-1} r_{i-\frac{1}{2}}$$

$$x_i = x_{i-\frac{1}{2}} + z$$

$$r_i = b - Ax_i$$

если $\frac{\|r_i\|}{\|b\|} < \gamma$, где γ - заданная точность, то стоп.

При разработке многоуровневого решателя использовался основной принцип проектирование решения с «мелкой сетки» на «грубую сетку», в данном случае в качестве «мелкой сетки» используется разбиение для разрывной компоненты решения, а в качестве «грубой» - конечноэлементное подпространство, на котором определена непрерывная компонента решения.

Результаты вычислительных экспериментов

В качестве модельной задачи рассмотрим задачу (1), имеющую аналитическое решение: $u = e^{-\alpha[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]}$, с резким пиком на некоторой подобласти, параметры задачи: $\alpha = 100$, $x_0 = 0.5$, $y_0 = 0.5$, $z_0 = 0.5$, $\Omega = [0, 1]^3$, $P = [0.375, 0.75]^3$. Для данного набора параметров пик не очень выраженный (Рис.1). При определении местоположения

подобласти P , на которой определены и непрерывная и разрывная компоненты решения важно правильно задать границы этой области, не допуская значительного увеличения ее размеров. В области $\Omega \setminus P$, где определена только непрерывная компонента, решение практически постоянно, и сетка тоже остаётся неизменной. В области P решение резко меняется, поэтому имеет смысл использовать h -refinement на данной подобласти. В области $\Omega \setminus P$ рассматривались равномерные параллелепипедальные сетки: с шагом $1/8$ по всем направлениям, в области P – с шагом $1/8, 1/16, 1/32, 1/64$ по всем направлениям. На Рис.1 представлена проекция функции погрешности решения на плоскость yz вдоль прямой, пересекающей параллелепипед Ω по диагонали. При решении модельной задачи с данным набором параметров преимущества применения MDG-метода (или DG-метода) по сравнению с конформным методом конечных элементов не очевидны, что связано с достаточной гладкостью решения и значительными вычислительными затратами многомасштабных методов. В таблице1 приведены значения абсолютной погрешности решения задачи MDG-методом на вложенных сетках.

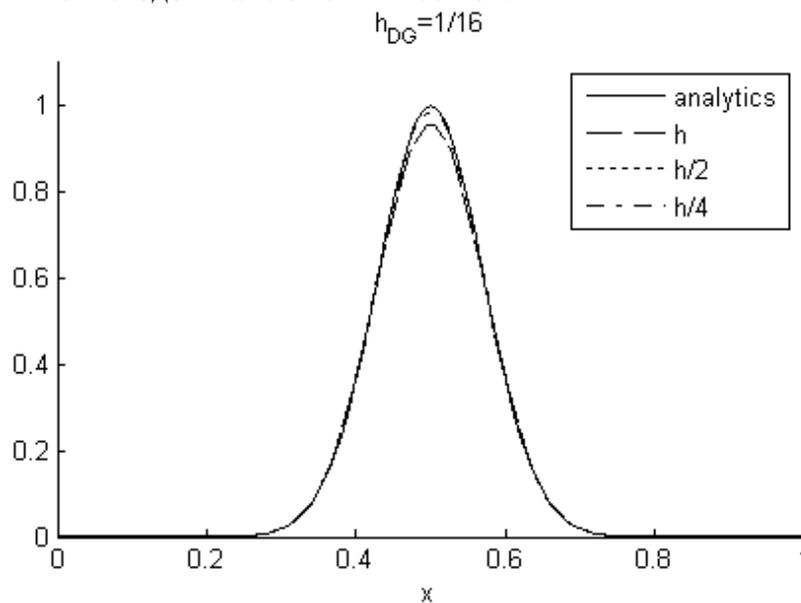


Рис.1 Сравнение аналитического решения модельной задачи с решением на вложенных сетках

Таблица1 Оценка погрешности решения на вложенных сетках

$h_x=h_y=h_z$ в мелком разбиении	$\ u - u_h\ _{L^2}$
1/8	0.00926
1/16	0.00519
1/32	0.000152
1/64	0.000038

Рассмотрим модельную задачу с другим набором параметров: $\alpha = 1000, x_0 = 0.5, y_0 = 0.5, z_0 = 0.5, \Omega = [0, 2]^3, P = [0.875, 1.25]^3$. В данном случае пик будет более резким (Рис.2), и на грубой сетке погрешность решения достаточно велика (таблица2). Стратегия построения вложенных сеток остается той же – в области $\Omega \setminus P$ шаг равен $1/16$ по всем осям, в области P он меняется (таблица2).

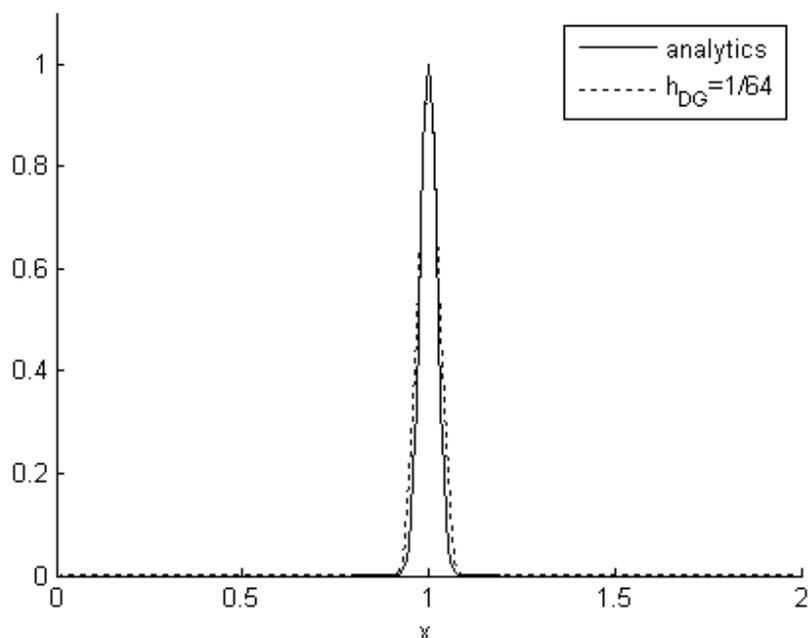


Рис.2 Сравнение аналитического решения модельной задачи с решением на вложенных сетках

Таблица2 Оценка погрешности решения на вложенных сетках

h _x =h _y =h _z в мелком разбиении	$\ u - u_h\ _{L^2}$
1/8	2.3
1/16	0.258
1/32	0.000416

При решении конформным МКЭ (CG-метод) аналогичную погрешность решения можно получить при равномерном шаге разбиения (1/32) по всей области моделирования, но такая мелкость разбиения приводит к увеличению количества степеней свободы до 274625 и увеличению времени решения до 225 с. При решении данной задачи многомасштабным разрывным методом Галёркина аналогичная погрешность достигается для СЛАУ с 9009 степенями свободы, время решения которой составляет одну секунду. Отметим, что такое преимущество MDG-метода во многом обусловлено определением размера и местоположения подобласти P.

Список литературы

1. Arnold D.N., Brezzi F., Coclburn B., Marini D. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems//SIAM J. Numer. Anal. 2002. Vol.39, №5. P.1749-1779.
2. Hughes T. J. R., Feijoo G. R., Mazzei L., Quincy J-B. The variational multiscale method a paradigm for computational mechanics// Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 1998. №166. P. 3–24.
3. Nechaev O.V., Shurina E.P., Botchev M.A.. Multilevel iterative solvers for the edge finite element solution of the 3D Maxwell equation // An International Journal Computers & mathematics with applications. 2008. №55. P. 2346-2362.