

# Математическая модель и численная методика моделирования развитого турбулентного течения неньютоновских вязкопластических жидкостей

А. А. ГАВРИЛОВ

*Институт теплофизики СО РАН, Новосибирск*

e-mail: gavand@yandex.ru

А.В. МИНАКОВ

*Сибирский федеральный университет, Красноярск*

А. А. ДЕКТЕРЕВ

*Сибирский федеральный университет, Красноярск*

В.Я. РУДЯК

*Институт теплофизики СО РАН, Новосибирск*

Течения неньютоновских жидкостей в каналах, встречающиеся в различных приложениях, как правило, происходит в турбулентном режиме. Несмотря на это экспериментальных данных по изучению таких течений чрезвычайно мало. Фактически отсутствуют и численные алгоритмы, позволяющие решить данную задачу. Практическая значимость задачи, однако, инициировала в последние годы появление работ по численному моделированию течений неньютоновской жидкости [1, 2, 3, 4]. Таким образом, создание численного алгоритма, позволяющего регулярно описывать течения данного класса, актуально. Разработке такого алгоритма на основе метода контрольного объема и посвящена настоящая работа. Рассматриваются течения степенной жидкости и жидкостей Бингама и Гершеля–Балкли. Использована двухпараметрическая модель турбулентности и специальным образом осредненный коэффициент эффективной молекулярной вязкости. Тестовые расчеты выполнены для течений степенной жидкости и жидкости Гершеля–Балкли в прямой круглой трубе. Данные, полученные с помощью предлагаемого численного алгоритма, сопоставлялись с результатами прямого численного моделирования [1,2].

## 1. Модель описания течений

Рассматриваются изотермические турбулентные полностью развитые стационарные течения несжимаемой неньютоновской жидкости. Для описания течения используются осредненные по Рейнольдсу уравнения гидродинамики. Для вязкопластических неньютоновских жидкостей эффективный коэффициент молекулярной вязкости жидкости  $\mu$  зависит от скорости сдвига  $\dot{\gamma}$

$$\mu = \mu(\dot{\gamma}), \quad \dot{\gamma} = \sqrt{2\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}}, \quad \mathbf{S} \equiv S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

где  $u_i$  – декартовы компоненты вектора скорости. В работе рассматриваются жидкости со степенным реологическим законом (степенные жидкости), жидкости Бингама и

Хершеля–Балкли. Для жидкостей Хершеля–Балкли эффективная молекулярная вязкость описывается выражением

$$\mu_e = (\tau_0 + k_v \dot{\gamma}^n) \dot{\gamma}^{-1}. \quad (1)$$

Здесь  $\tau_0$  – предел текучести вязкопластической жидкости, для степенной жидкости равный нулю. Ниже определенного предельного значения напряжений среда ведет себя как твердое тело, выше этого предела – как несжимаемая вязкая жидкость.  $n$  и  $k_v$  – параметры реологических моделей. При  $\tau_0=0$  из (1) следует эффективная вязкость для степенной жидкости, а при  $n=1$  – жидкости Бингама.

Для турбулентного течения коэффициент эффективной вязкости представляет собой сумму коэффициента молекулярной вязкости и турбулентной вязкости. Турбулентная же вязкость определяется в соответствии с выбранной моделью турбулентности. Кроме того, в турбулентных течениях вязкость неньютоновской среды зависит от флуктуаций скорости сдвига. В данной работе предложена модель описания осредненной эффективной молекулярной вязкости, основанная на подходе, развитом в работах [3, 4] для степенной жидкости в области развитой турбулентности. В этой области значение средней молекулярной вязкости оказывается функцией турбулентных величин и реологических параметров. В ламинарном подслое турбулентного пограничного слоя молекулярная вязкость определяется на основе средней скорости потока. Сшивка выражений для различных областей осуществляется на основе введения демпфирующей функции, равной нулю вблизи стенки и единице в ядре турбулентного потока.

Выражение для средней скорости сдвига представляется суммой двух слагаемых:  $\langle \dot{\gamma} \rangle^2 = 2 \langle S_{ij} S_{ij} \rangle = 2 \langle S_{ij} \rangle \langle S_{ij} \rangle + \langle 2S'_{ij} S'_{ij} \rangle$ . Здесь скобки обозначают осреднение, а штрих относится к пульсационным величинам. Первое слагаемое в правой части рассчитывается по градиентам средней скорости, а второе определяет среднюю пульсационную скорость сдвига.

Скорость диссипации турбулентной энергии в ньютоновской среде, характеризующую среднее количество энергии, переходящей в тепло в единице массы за единицу времени, определим по аналогии с соответствующим выражением для ньютоновской жидкости

$$\rho \varepsilon = \langle \mu \rangle \langle 2S'_{ij} S'_{ij} \rangle \quad (2)$$

где  $\langle \mu \rangle$  среднее значение коэффициента молекулярной вязкости. Используя соотношение (2), выражение для средней скорости сдвига сводится к следующему

$$\langle \dot{\gamma} \rangle^2 = 2 \langle S_{ij} \rangle \langle S_{ij} \rangle + \frac{\rho \varepsilon}{\langle \mu \rangle}. \quad (3)$$

Будем далее считать, что среднее значение коэффициента молекулярной вязкости связано со средним значением скорости сдвига таким же реологическим соотношением, что и для мгновенных величин (1), т.е.

$$\langle \mu \rangle = \frac{\tau_0}{\langle \dot{\gamma} \rangle} + k_v \langle \dot{\gamma} \rangle^{n-1} \quad (4)$$

Таким образом, значение коэффициента средней молекулярной вязкости можно найти, решив уравнения (3), (4). Для нахождения поля коэффициентов средней молекулярной вязкости предлагается использовать следующий двухшаговый итерационный

алгоритм. На первом шаге по текущим значениям средней скорости, скорости диссипации и коэффициенту молекулярной вязкости по формуле (3) рассчитывается значение локальной средней скорости сдвига. Затем по найденной средней скорости сдвига определяются значения коэффициента средней эффективной молекулярной вязкости (4), которые используются при решении уравнений гидродинамики на новом итерационном слое.

Расчет коэффициента молекулярной вязкости вблизи твердой стенки также строится итерационно. Средняя скорость сдвига вблизи стенки определяется по известному значению касательного трения на стенке  $\tau_w$  и значению коэффициента вязкости с предыдущего итерационного слоя:  $\langle \dot{\gamma} \rangle_w = \tau_w / \langle \mu \rangle_w$ . Затем с помощью соотношения (4) рассчитывается текущее значение коэффициента молекулярной вязкости на стенке:  $\langle \mu \rangle_w = \tau_0 \langle \dot{\gamma} \rangle_w^{-1} + k_v \langle \dot{\gamma} \rangle_w^{n-1}$ .

Численный метод, используемый в данной работе, основан на методе контрольного объема и методике расщепления. Детали его реализации для моделирования течений ньютоновских жидкостей подробно изложены в статье [5]. Описанный выше итерационный алгоритм легко встраивается в численный метод расчета уравнений гидродинамики. В качестве модели турбулентности используется двухзонная  $k$ - $\omega$  модель Ментера [6]. Модель содержит уравнения переноса энергии турбулентных пульсаций  $k$  и удельной диссипации  $\omega$ . При этом величина скорости диссипации, используемая в определении коэффициента средней молекулярной вязкости, рассчитывается следующим образом:  $\varepsilon = \beta^* \omega k$ ,  $\beta^* = 0.09$ .

## 2. Тестовые расчеты

Как уже упоминалось, в качестве тестовых расчетов в данной работе рассматривались данные прямого численного моделирования [1, 2]. В качестве первого теста выполнены расчеты установившегося турбулентного течения в прямой круглой трубе для степенной жидкости с различными показателями степени. Обобщенное число Рейнольдса, определяемое по значению коэффициента вязкости на стенке, среднемассовой скорости  $U$  и диаметру трубы  $D$ ,  $Re = \rho U D / \mu_w$ , для рассмотренных режимов было около 5500. Рассчитаны три режима течения с разными реологическими параметрами: (i)  $n=0,75$ ,  $k=0,32$ ,  $Re=5514$ , (ii)  $n=0,69$ ,  $k=0,483$ ,  $Re=5501$  и (iii)  $n=0,5$ ,  $k=1,527$ ,  $Re=5348$ . Проведенное сопоставление данных расчетов с помощью предлагаемого алгоритма и прямого численного алгоритма во всех случаях демонстрирует достаточно высокую точность в определении и осредненных и пульсационных характеристик течения. С точки зрения предлагаемой модели наиболее интересным является сопоставление распределений коэффициента средней молекулярной вязкости, полученной этими двумя методами. В наших численных расчетах, как и при прямом численном моделировании, наблюдается монотонный рост значений коэффициента средней молекулярной вязкости при удалении от стенки. С уменьшением показателя степени  $n$  отношение вязкости в ядре потока к вязкости на стенке увеличивается: при  $n=0,75$  оно равно 2,3, при  $n=0,69$  – 2,6, а при  $n = 0,5$  – 6. Существенные отличия наших расчетов от данных [1] (порядка 15%) наблюдаются в ядре течения, где подход с использованием уравнений Рейнольдса дает завышенное значение осредненной вязкости.

Второй тестовый расчет – моделирование в прямой круглой трубе установившегося турбулентного течения жидкости Гершеля-Балкли с различными значениями предела текучести. Расчеты выполнялись для двух режимов, изученных с помощью прямого

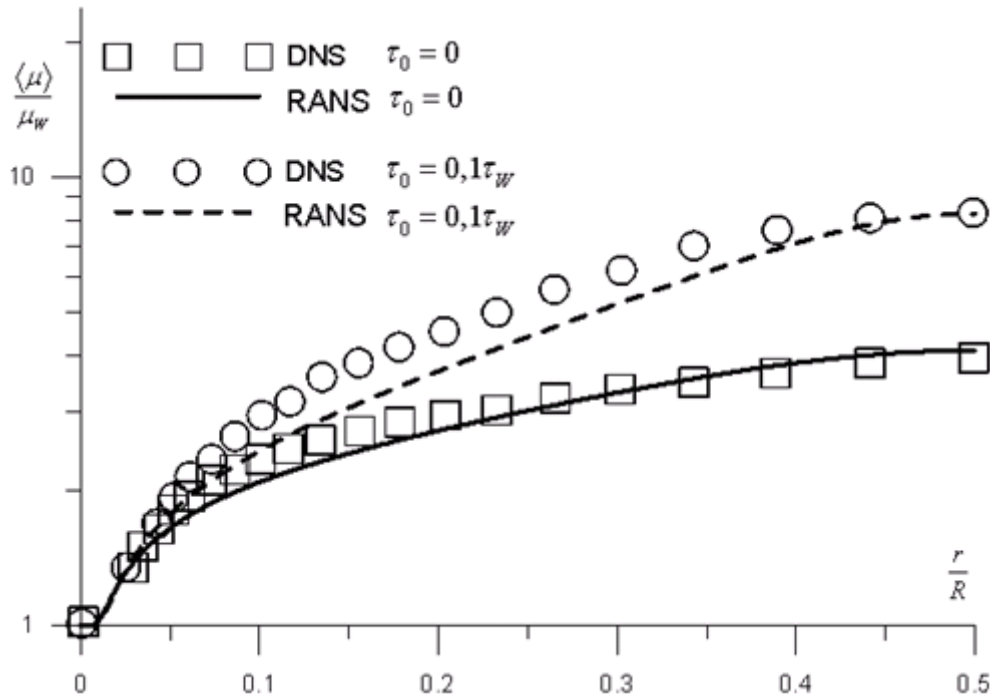


Рис. 1. Распределения нормированных средних значений коэффициента молекулярной вязкости вдоль радиуса трубы для течения жидкости Гершеля-Балкли с показателем степени  $n=0,6$ .

численного моделирования в работе [2]. В обоих случаях  $n=0,6$  и  $k=0,1$ , но в первом случае  $\tau_0=0$  (степенная жидкость) и  $Re=8200$ , а во втором –  $\tau_0=0,25=0,1\tau_w$  Па и  $Re=7754$ . Данные прямого численного моделирования снова в целом хорошо согласуются с нашими расчетными. На рис. 1 представлено сопоставление радиальных распределений осредненного коэффициента эффективной молекулярной вязкости, полученных в наших расчетах (непрерывные кривые) и прямым численным моделированием (метки). Расчету с нулевым предельным напряжением соответствует нижняя сплошная кривая и квадратные метки, а с ненулевым – верхняя пунктирная кривая и круглые метки. В качестве нормирующего параметра используется значение коэффициента вязкости на стенке. В обоих случаях наблюдается хорошее согласование приводимых данных, как в ядре течения, так и в пристеночной области. Напомним, что в предыдущем случае наши данные в ядре потока отличались от данных [1] примерно на 15 %. Улучшение согласования, имеющее место на рис. 1, по-видимому, связано с более высокими числами Рейнольдса в этом случае. На это же указывает и проведенное сопоставление расчетных значений касательного трения с известной корреляцией Доджа–Метцнера [7]. Полученные нами расчетные значения трения превышают значения, даваемые корреляцией [7], примерно на 20 % при числах Рейнольдса порядка трех тысяч. Однако с ростом чисел Рейнольдса это отличие уменьшается и при  $Re \approx 10^4$  отличие численных значений касательного трения от корреляции не превышает 4 %.

## Список литературы

- [1] RUDMAN M., BLACKBURN H.M., GRAHAM L.J.W., PULLUM L. Turbulent pipe flow of shear-

- thinning fluids // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 118 (2004) 33–48.
- [2] RUDMAN M., BLACKBURN H.M. Direct numerical simulation of turbulent non-Newtonian flow using a spectral element method // Applied Mathematical Modelling 30 (2006) 1229–1248.
- [3] PINHO F.T. A GNF framework for turbulent flow models of drag reducing fluids and proposal for a  $k-\varepsilon$  type closure // J.Non-Newtonian Fluid Mech. 114 (2–3) (2003) 149–184. 1229–1248.
- [4] CRUZ D.O.A. AND PINHO F.T. Turbulent flow predictions with a low- Reynolds number  $k-\varepsilon$  model for drag reducing fluids // J. Non-Newt. Fluid Mech., 114, 109-148.
- [5] ГАВРИЛОВ А.А., МИНАКОВ А.В., ДЕКТЕРЕВ А.А., РУДЯК В.Я. Численный алгоритм для моделирования ламинарных течений в кольцевом канале с эксцентриситетом // СибЖИМ. 2010. Т. 13. №4(44). С. 46–61.
- [6] MENTER F.R. Zonal two equation  $k-\omega$  turbulence models for aerodynamic flows // AIAA Paper. 1993. № 93-2906. 21 p.
- [7] DODGE D.W., METZNER A.B. Turbulent flow of non-Newtonian system // A.I.Ch.E. Journal. Vol.5. №2. 1959. P.189-204.