Об одной модели теории фильтрации со свободными границами

С.Т. Мухамбетжанов
e-mail: <saltan@math.kz>

Введение. Рассматривается случай вытеснения нефти полимерными растворами, т.е. полимер растворяется только в воде. Тогда содержание полимера в растворе увеличивает вязкость водной фазы, а с ростом количества адсорбированного полимерного вещества уменьшается фазовая проницаемость для воды.

1 Вывод уравнений. Введение дополнительного фактора (активной примеси) приводит к изменению системы уравнений двухфазной фильтрации, состоящей из уравнений баланса воды и нефти в потоке, обобщенного закона фильтрации Дарси и условия капиллярного равновесия:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(m \cdot s \cdot \rho_1\right) + div\left(\rho_1 \cdot \mathbf{u}_1\right) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(m \cdot (1-s) \cdot \rho_2\right) + div\left(\rho_2 \cdot \mathbf{u}_2\right) = 0, \tag{2}$$

$$\mathbf{v}_i = -k\frac{f_i}{\mu_i}\nabla p_i,\; i = 1,2, \tag{3}$$

$$p_2 - p_1 = p_c(S) \tag{4}$$

где m, ρ_i, μ_i, f_i, k и $p_c(s)$ - соответственно пористость среды, плотности фаз, вязкости жидкостей, относительные фазовые проницаемости, проницаемость среды и капиллярное давление.

В уравнениях (1) – (4) все основные характеристики жидкостей и пористой среды при введении активной примеси меняются, и система не является замкнутой. Исходя из результатов работы [1] для замыкания модели добавляется следующее уравнение относительно концентрации с-активной примеси:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(m \cdot c \cdot s \cdot \rho_1 + m \cdot \varphi \cdot \rho_2\left(1-s\right) + a(c)\right) = div\left(D \cdot \nabla c - c \cdot \mathbf{v}_1 \cdot \rho_1 - \varphi \cdot \mathbf{v}_2 \cdot \rho_2\right) \tag{5}$$

где $\varphi(c), a(c)$ - соответственно массовые концентрации примеси в нефтяной фазе и адсорбированные примеси в единице объема пористой среды. В соотношении (5) при вытеснении нефти полимерными растворами функция $\varphi(c) = 0$, а функция $a(c)$, как правило, определяется через уравнение Ленгмюра или по закону Генри. Такое предположение не всегда оправдано. В частности, для мицеллярных растворов изотерма сорбции ПАВ в окрестности критической концентрации мицеллообразования c_* может быть немонотонной. Указанную трудность можно обойти введением следующей функции: $\chi\left(c\right) = 1$ при $c > c_*$, $\chi\left(c\right) = 0$ при $c < c_*$ и $\chi\left(c\right) \in [0,1]$ при $c = c_*$. Тогда функцию $a(x,t)$ можно определить из следующего уравнения:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \cdot \left(\chi(c) - a\right), \tag{6}$$

где τ- время прибывания каждой молекулы в адсорбционный центр.

Лемма 1. Пусть $u \in W_p^1(Q)$, Q - ограниченная область в $\mathbb{R}^k$, $p > 1$, $A_\varepsilon = \{x \in Q| \, |u(x)| \le \varepsilon\}$. Тогда $\nabla u = 0$ п.в. в A_0.

Лемма 2. Пусть Q – ограниченная область в $\mathbb{R}^k$, $v_n, v, g \in L_p(Q)$, $p > 1$, $\forall x \in Q \backslash A$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} v_n(x) = f(x)$ и $\forall n \in N$, $|v_n(x)| \le g(x)$, где $mes A = 0$; $v_n \to v$ слабо в $L_p(Q)$. Тогда $v \ge f$ п.в. в Q.

2 Постановка задачи. Будем рассматривать фильтрационное течение с активной примесью в заданной конечной области Ω с кусочно - гладкой границей $\Gamma \equiv \partial\Omega$. В соответствии с различными видами граничных условий граница Γ может разбиваться на несколько связных компонент Γ^i. Пусть $Q_T = \Omega \times [0,T]$, $S_T^i = \Gamma^i \times [0,T]$, n – внешняя нормаль к границе Γ. Следуя результатам работы [3] систему (1) – (6) можно представить в следующем виде:

$$m \cdot \frac{\partial s}{\partial t} = div\left(K_0 \cdot a_1 \cdot \nabla s - b \cdot \mathbf{v} + \mathbf{F}\right), \tag{7}$$

$$div\left(K \cdot \nabla P + \mathbf{f}\right) = 0, -\mathbf{v} = K \cdot \nabla P + \mathbf{f}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(m \cdot c \cdot s + a\right) = div\left(D \cdot \nabla c - c \cdot \mathbf{v}\right) \tag{9}$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \cdot \left(\chi(c) - a\right), \tag{10}$$

где функция $\chi(c)$ равна единице, если $c > c_*$, $\chi(c)$ равна нулю, если $c < c_*$ и принимает значения из промежутка [0,1], если $c = c_*$, m–пористость, $K = K_0(x)$ — тензор фильтрации для однородной жидкости, капиллярное давление обладает следующими свойствами:

$$\frac{\partial P_k}{\partial s} < 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial P_k}{\partial c} \le 0,$$

а

$$p = p_1 - \int \frac{\partial p_k}{\partial s}\frac{k_{02}}{k} d\xi + \rho_1 g h$$

— приведенное давление, остальные коэффициенты и функции определяются из следующих соотношений:

$$k = k_{01}(s) + k_{02}(s), \quad a_1 = -\frac{\partial p_k}{\partial s}\frac{k_{01}k_{02}}{k}, \quad \mathbf{F} = K_1 \int \nabla \frac{\partial p_k}{\partial s}\frac{k_{02}}{k} d\xi, \tag{11}$$

$$K = K_1 + K_2 = kK_0 = (k_{01} + k_{02})K_0, \bar{f} = K \int \nabla \frac{\partial p_k}{\partial s}\frac{k_{02}}{k} d\xi + K_2 \nabla p_k + K_2(\rho_2 - \rho_1)\mathbf{g}.$$

Таким образом, требуется найти функции $\{s, p, \mathbf{v}, c, a\}$ (соответственно водонасыщенность, давление, скорость течения, концентрацию активной примеси, функцию адсорбции), определенные в Q_T, удовлетворяющие уравнениям (7)-(10), начальным:

$$s|_{t=0} = s_0(x), c|_{t=0} = c_0(x), a|_{t=0} = a_0(x), \tag{12}$$

а также следующим граничным условиям:

$\mathbf{vn} = \mathbf{v}_1\mathbf{n} = 0$ – условие непротекания и для концентрации:

$$c\,(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in S^0 = \Gamma^0 \times [0,T]\,. \tag{13}$$

$$p = p_0(x,t), s = s_0(x,t),$$

$$-D \cdot \frac{\partial c}{\partial n} + \mathbf{v}_{1n} \cdot c = \mathbf{v}_{1n} \cdot \tilde{c} \ \text{ при } \ (x,t) \in S^2 = \Gamma^2 \times [0,T]\,, \tag{14}$$

$$-(K\nabla p + \mathbf{f})\mathbf{n} \equiv \mathbf{vn} = R(x,t), (x,t) \in S^1 = \Gamma^1 \times [0,T]\,,$$

$$-(K_0 a_1 \nabla s + K_1 \nabla p + \mathbf{f}_0)\mathbf{n} \equiv \mathbf{v}_1\mathbf{n} = bR(x,t), (x,t) \in S^1. \tag{15}$$

$$-D \cdot \frac{\partial c}{\partial n} + \mathbf{v}_{1n} \cdot c = q_n \cdot c^* \ \text{ при } \ (x,t) \in S^1 = \Gamma^1 \times [0,T]\,,$$

где q_n – заданный расход на единицу площади, $\tilde{c}$ и c^*—известные значения концентрации примеси.

Всюду ниже предполагается, что все коэффициенты в системе уравнений (7)–(10) определены при всех (x,s,c) и имеют непрерывные производные вплоть до первого порядка. В дальнейшем систему уравнений (7) – (10) с дополнительными условиями (12) – (15) будем называть задачей 1.

Определение. Ограниченные измеримые в Q_T функции $s\,(x,t)\,, p\,(x,t)\,, c\,(x,t)\; a(x,t)$ назовем обобщенным решением задачи 1, если

а) $0 \le s\,(x,t) \le 1$, $0 \le c\,(x,t)$, $0 \le a\,(x,t) \le 1$ почти всюду в Q_T;

б) $\nabla p \in L_{2,\infty}\,(Q_T)$, $a_1 \cdot \nabla s \in L_2(Q_T)$, $D \cdot \nabla c \in L_2(Q_T)$;

в) a_t, $a \in L_\infty(Q_T)$;

г) на S^2выполняются граничные условия (14);

д) для произвольных допустимых функций таких, что

$$\varphi\,(x,t)\,, v\,(x,t) \in W_2^{1,1}\,(Q_T)\,, \psi\,(x) \in W_2^1\,(\Omega)\,,$$

$$\varphi\,(x,t)\,|_{S^2} = v\,(x,t)\,|_{S^2} = \Psi\,(x)\,\,|_{S^2} = 0$$

при почти всех $t \in [0,T]$ выполняются равенства

$$\Im_1 \equiv (ms, \varphi_t)_{Q_t} + (\mathbf{v}_1, \nabla\varphi)_{Q_t} = (bR, \varphi)_{S_t^1} - (ms, \varphi)_\Omega\,\big|_0^t \tag{16}$$

$$\Im_2 \equiv (\mathbf{v}, \nabla\psi)_\Omega = (R, \psi)_{\Gamma^1} \tag{17}$$

$$\Im_3 \equiv (m \cdot s \cdot c + a, v_t)_{Q_t} + (D \cdot \nabla c - c \cdot \mathbf{v}_1, \nabla v)_{Q_t} = (v_{1n} \cdot \tilde{c}, v)_{S_t^1} - (m \cdot s \cdot c + a, v)_\Omega\,\big|_0^t\,. \tag{18}$$

Замечание 1. Всюду ниже считается, что в области течения отсутствуют застойные зоны, в которых достигаются предельные значения $s = 0, 1$. Задачу 1 в этом случае будем называть регулярной, т.е. $a_1 \ge \delta > 0$, а ее решения регулярными. Такое определение введено в работе [1].

Замечание 2. В области $E_c = \{(x,t) \in Q_T\,|c\,(x,t) = c_*\}$ выполняются равенства (см. лемму 1). Тогда из уравнений (9), (10) выводится $\chi\,[c\,(x,t)] = a\,(x,t)$ для п.в. в $(x,t) \in E_c$ и из определения функции $\chi(c)$ следует, что $0 \le a\,(x,t) \le 1$ для п.в. $(x,t) \in E_c$.
Здесь и далее обозначения норм и пространств функций совпадают с обозначениями в [1].

3 Существование. Функция $\chi(c)$ аппроксимируется непрерывными монотонными функциями $\chi_n(c)$, совпадающими с $\chi(c)$ при $c > c_* + \frac{1}{n}, c < c_*$, $n = 1, 2, \ldots$ Через

$(7)_n - (10)_n$ обозначаются система уравнений (7) – (10), где вместо функции $\chi(c)$ рассматривается функция $\chi_n(c)$. Тогда задача 1 решается по следующей последовательности: эллиптическая задача относительно давления, затем нелинейные параболические задачи относительно насыщенности $s\,(x,t)$ и с использованием теоремы Шаудера о неподвижной точке концентрация активной примеси $c\,(x,t)$ с функцией

$$a\,(x,t) = a_0\,(x) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{\tau} \cdot \int_0^t \chi_n\,(g\,(x,\zeta)) \cdot e^{\frac{\zeta - t}{\tau}} d\zeta, \tag{19}$$

причем $c\,(x,t) = \Lambda\,(g\,(x,t))\,,$ где $\Lambda : W_2^{1,1}\,(Q_T) \to W_2^{1,1}\,(Q_T)$ оператор, неподвижная точка которого дает решение задачи 1. При этом имеет место следующая

Теорема 1. Пусть коэффициенты в системе уравнений имеют непрерывные производные вплоть до первого порядка и дополнительно

$$\left(\|p_0\|_{\infty,Q_t}\,; \sup_t \|p_0\|_{W_2^1(\Omega)}\,; \|s_{0_t}\|_{1,Q_T}\,; \|\nabla s_0\|_{2,Q_T}\,; \|\mathbf{c}_t\|_{1,Q_T}\,; \|\nabla c_0\|_{2,Q_T} \right) \le M;$$

$a_0\,(x)$ — измерима и $0 \le a\,(x,t) \le 1$, $x \in \Omega$.

Тогда существует одно обобщенное решение задачи 1 (в смысле выполнения определения 1) и функций $s\,(x,t)$,$c\,(x,t)$ и $a(x,t)$ удовлетворяют п.в. в Q_T неравенствам:

$$0 < \delta_0 \le \min s_0\,(x,t) \le s\,(x,t) \le \max s_0\,(x,t) \le 1 - \delta_1 < 1 \tag{20}$$

$$0 \le c\,(x,t) \le 1, 0 \le a\,(x,t) \le 1, |a_t| \le 1 \tag{21}$$

Доказательство. Оценка (19) и первое неравенство в (21) является следствием принципа максимума, а второе неравенство в (21) следует из представления (18). Существование решения задачи 1 относительно функций (s,p) полностью повторяет рассуждения из [2], т.е. приближенные решения вспомогательной задачи 1 ищется в виде

$$s^n\,(x,t) = \sum_{k=1}^{N} \tilde{a}_k^N\,(t) \cdot \varphi_k\,(x) + s_0\,(x,t)\,, \tag{22}$$

$$p^n\,(x,t) = \sum_{k=1}^{N} \tilde{b}_k^N\,(t) \cdot \psi_k\,(x) + p_0\,(x,t)\,, \tag{23}$$

Аналогичное представление имеет место для функции $c\,(x,t)$:

$$c^N\,(x,t) = \sum_{k=1}^{N} d_k^N\,(t) \cdot v_k\,(x) + \tilde{c}\,(x,t)\,, \tag{24}$$

где фундаментальные в $W_2^1\,(\Omega,\Gamma^2) = \{\varphi\,(x)\,, v\,(x) \in W_2^1\,(\Omega)\,, \varphi\,(x) = v\,(x) = 0, x \in \Gamma^2\}$ системы функций φ_k, v_kи ψ_kнормированы следующим образом:

$$(m\varphi_k, \varphi_i) = \delta_{ik}, (mv_k, v_i) = \delta_{ik}, (\nabla\psi_k, \nabla\psi_i) = \delta_{ik},$$

где δ_{ik}- символы Кронекера. Для определения неизвестных функций $\tilde{a}_k^N\,(t)\,,\ b_k^N,\ d_k^N\,(t)$ получаем нелинейную эволюционно - стационарную систему уравнений:

$$\frac{d\tilde{a}_k^N}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \tilde{a}_j^N \cdot \alpha_{jk} + \beta_k, \tilde{a}_k^N(0) = 0 \tag{25}$$

$$\sum_{j=1}^{N} b_j^N \cdot \mu_{jk} + \lambda_k = 0 \tag{26}$$

$$\frac{dd_k^N}{dt} = \sum_{j=1}^{N} d_j^N \cdot \gamma_{jk} + \aleph_k, d_k^N(0) = 0 \tag{27}$$

в которой $\alpha_{jk} = -\left(K_0 \cdot \bar{a}_1 \cdot \nabla\varphi_j, \nabla\varphi_k\right)_\Omega + \left(b \cdot \mathbf{v}, \nabla\varphi_k\right)_\Omega$; $\beta_k = -\left(ms_{0_t}, \varphi_k\right)_\Omega + \left(\mathbf{F}, \nabla\varphi_k\right)_\Omega - \left(K_0 \cdot \bar{a}_1 \cdot \nabla s_0, \nabla\varphi_k\right)_\Omega$; $\mu_{jk} = \left(K \cdot \nabla\psi_j, \nabla\psi_k\right)_\Omega$; $\mu_{jk} = \left(\mathbf{f}, \nabla\psi_k\right)_\Omega - \left(R, \psi_k\right)_{\Gamma^2}$;
$\gamma_{jk} = -\left(D \cdot \nabla v_j, \nabla v_k\right)_\Omega + \left(\mathbf{v}_1 \cdot v_j, \nabla v_k\right)_\Omega - \left(m \cdot \bar{s}_t \cdot v_j, v_k\right)_\Omega + \frac{1}{\tau}\left(a - p(g), v_k\right)_\Omega$;

$$\aleph_k = -\left(m \cdot \bar{s} \cdot \tilde{c}_t, v_k\right)_{\Gamma^2} - \left(D \cdot \nabla\tilde{c}, \nabla v_k\right)_\Omega + \left(\tilde{c} \cdot \mathbf{v}_1, \nabla v_k\right)_{\Gamma^2}.$$

Разрешимость задач (25) – (27) следует из сделанных предположений на коэффициенты этой вспомогательной системы, т.е. функции $\mu_{jk}, \lambda_k, \gamma_{jk}$ ограничены, а $\beta_k, \aleph_k$ интегрируемые функции по $t \in [0, T]$ при всех значениях $\tilde{a}_k^N$, b_k^N, d_k^N. Сначала решается (26) для определения b_k^Nв каждый момент времени из нелинейной системы алгебраических уравнений. Затем решаются задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (25) и (27) для определения функций $\tilde{a}_k$и d_k^N соответственно. Последняя, в силу указанных выше свойств коэффициентов, разрешима для всех значений $t \in [0, T]$, принадлежащих пространству $W_2^1(0, T)$. Следовательно, при каждом N на интервале (0,T) существует единственное решение задачи Коши при $k = 1, 2, \ldots, N$. Тогда следуя результатам работ [2,3] легко получить равномерные по N оценки приближенных решений, позволяющие совершить предельный переход при $N \to \infty$. Таким образом, полученное решение определяет в $W_2^{1,1}(Q_T)$ некоторое выпуклое, ограниченное подмножество, которое оператор P переводит в себя. Так как P – вполне непрерывный, то по теореме Шаудера существует неподвижная точка оператора P, которая и дает решение задачи $(7)_n - (10)_n$.

Обозначим его через $\{s_n, p_n, c_n, a_n\}$. Тогда в силу априорных оценок для $\{s_n, p_n, c_n, a_n\}$ и ограниченность $\chi_n(c_n)$ позволяют выделить подпоследовательность nk, такую, что $\left\{s_{n_k}, p_{n_k}, c_{n_k}, a_{n_k}\right\} \to \{s, p, c, a\}$ п.в. в Q_T, $\frac{\partial s_{n_k}}{\partial t} \to \frac{\partial s}{\partial t}$, $\frac{\partial c_{n_k}}{\partial t} \to \frac{\partial c}{\partial t}$, $\nabla s_{n_k} \to \nabla s$, $\nabla c_{n_k} \to \nabla c$, $\nabla p_{n_k} \to \nabla p$, слабо в $L_2(Q_T)$, $a_{n_k} \to a$, $\frac{\partial a_{n_k}}{\partial t} \to \frac{\partial a}{\partial t}$, $\chi_{n_k}(c_{n_k}) \to h\overset{*}{-}$слабо в $L_\infty(Q_T)$.

Из определения функции χ_nи сходимости c_{n_k}к c п.в. в Q_T, следует, что $h(x, t) = \chi(c)$ п.в. в $Q_T \backslash E_c$, а также из леммы 2 на множестве E_c функция $h(x, t) = a(x, t)$. Окончательно, переходя к пределу в интегральных тождествах, аналогичным (16) – (18), получим искомое решение задачи 1.

4 Устойчивость и единственность решений

Теорема 2. Пусть выполнены условия (а) – (д) из определения и граница $\equiv \partial\Omega \in H_*^1$, $\{s_j, p_j, \mathbf{v}_j, c_j, a_j\}$ - обобщенные решения регулярных задач 1 соответственно с начальными и граничными функциями вида (12) – (15), $j = 1, 2$, и такие, что

$$\left(\|\nabla s_j\|_{\alpha_1, \beta_1, Q_T}; \|\nabla p_j\|_{\alpha_2, \beta_2, Q_T}; \|R_j\|_{\alpha_0, \beta_0, \Gamma''}\right) \le M \tag{28}$$

и при этом данные удовлетворяют условиям (11), то для $s = s_1 - s_2$, $p = p_1 - p_2$, $c = c_1 - c_2$, $a = a_1 - a_2$,

$$\Big(\|s;p\|_{V_2(Q_T)}\Big) \le C_0{\cdot}\mu; \Big(\|\nabla s;\nabla p\|_{q,Q_T}\Big) \le C_0{\cdot}\mu^{1-\gamma}; \quad \|c\|^{(2)}_{q,Q_T} \le C_1{\cdot}\lambda^{1/q}, \|a_t\|_{p,Q_T}{+}\|a\|_{p,Q_T} \le C_2{\cdot}\lambda^{1/p} \tag{29}$$

Здесь

$$\mu = (\|s_0\|_{V_2(Q_T)} + \|c_0\|_{V_2(Q_T)} + \|p_0\|_{V_2(Q_T)} + \|R\|_{\alpha_0,\beta_0,^1} +$$

$$\|a_0\|_{V_2(Q_T)} + \|s_{0t}\|_{2,Q} + \|a_{0t}\|_{V_2(Q_T)}), \quad 1 \le p < \infty,$$

константы C_0, C_1, C_2 зависят от $\alpha_i, \beta_i, T, \Omega$ и от норм данных.

Доказательство теоремы следует из результатов работ [1-2].

5 Предельный переход при $\tau \to 0$

Поведение решений при $\tau \to 0$ исследуется на примере задачи Дирихле. Для задачи Неймана верен аналогичный результат. Пусть χ - единичная функция Хевисайда, $K(Q_T)$- пространство функций, определенных в области Q_T, с нормой: $\|u\|_{K(Q_T)} = \|u\|_{\infty,Q_T} + \|u_{tt}\|_{1,Q_T} + \|\nabla u\|_{2,Q_T} + \|u_t\|_{2,Q_T} + \|\nabla u_t\|_{2,1,Q_T}$.

Рассматриваются функции $c^\tau(x,t)$, $a^\tau(x,t)$, $p^\tau(x,t)$, удовлетворяющие исходным уравнениям и условиям: $(c^\tau - c_0^\tau)|_{T\bigcup(t=0)} = 0$, $a^\tau|_{t=0} = a_0^\tau$, где $c_0^\tau \in W_q^{2,1}(Q_T) \bigcap K(Q_T)$, $a_0^\tau \in L_\infty(\Omega)$ и $a_0^\tau(x) = \chi[c_0^\tau(x,0)]$, $x \in \Omega$.

Без ограничения общности положим, что $D = const > 0$ и $s(x,t) = 1$. Тогда исходя из результатов работ [1-3] имеют места следующие утверждения

Теорема 3. Для решения регуляризованной задачи справедливы оценки:

$$\|c^\tau\|_{\infty,Q_T} \le M_1, \|c_t^\tau\|_{2,Q_T} + \max_{[0,T]} \|\nabla c^\tau\|_{2,\Omega} \le M_2, \|\chi(c^\tau) - a^\tau\|_{1,Q_T^\delta} \le M_3 \cdot \delta^{-1/2} \cdot \tau, \delta > 0,$$

где $Q_T^\delta = \Omega^\delta \times (0,T)$, $\Omega^\delta = \{x \in \Omega | \ \ dist(x,\Omega) > \delta\}$, а константы $M_i, i = 1,2,3$, зависят только от T, Ω и $\|c_0^\tau\|_{\Omega,T}$.

Теорема 4. Если $\|c_0^\tau - c_0\|_{\Omega,T} + \|a_0^\tau - a_0\|_{1,\Omega} \to 0$ при $\tau \to 0$, то $c^\tau + a^\tau \to U \equiv m \cdot c + \chi(c)$ при $\tau \to 0$.

Пусть $U \equiv m \cdot c + \chi(c)$ – обобщенное решение задачи Стефана, удовлетворяющие начальным и краевым условиям: $U(x,0) \equiv c_0(x,0) + a_0(x)$, $\quad x \in \Omega$, $c(x,t) = c_0(x,t)$, $\forall (x,t) \in \Gamma_T$, где $c_0(x,t) \in K(Q_T)$, $a_0(x) \in L_\infty(\Omega)$ и $a_0(x) = \chi[c_0^\tau(x,0)]$.

Условие (28) и оценки (29) позволяют выбрать подпоследовательность $\tau_k \to 0$ такую, что $c^{\tau_k} \to \tilde{c}$ слабо в $W_2^{1,1}(Q_T)$ и $\overset{*}{-}$ слабо в $L_\infty(Q_T)$, $a^{\tau_k} \to \chi(\tilde{c})$ $\overset{*}{-}$ слабо в $L_\infty(Q_T)$. После предельного перехода в соответствующем интегральном тождестве по $\tau_k \to 0$, получается, что $c^\tau + a^\tau \to U \equiv m \cdot \tilde{c} + \chi(\tilde{c})$ и следовательно, является обобщенным решением задачи Стефана в силу единственности решения.

В двумерном случае проведены численные расчеты с данными реального нефтяного месторождения Западного региона Республики Казахстан. Результаты использованы для анализа, контроля и оценки изменения технологических показателей месторождения. Для расчета же насыщенности, концентрации и температуры в введенной равномерной разностной сетке в окрестности скважин $k+1$ узлов объединяются в один «укрупненный» (объединяются узлы с индексами $i = 2, ..., k{+}2$ и $i = N{-}k{-}1, ..., N{-}1$). Для установления реальной картины в этой области сгущаются узлы – между каждыми узлами равномерной сетки с номерами от $i_=$ до $i_:$ вводятся по два дополнительных узла, т.е. интервалы равномерной сетки разбиваются на три равных интервала.

Список литературы

[1] Жумагулов Б.Т., Мухамбетжанов С.Т., Шыганаков Н.А. Моделирование вытеснения нефти с учетом массообменных процессов– Алматы: КазгосИНТИ, 2004. - 252 с.

[2] Bektemesov M.A., Mukhambetzhanov S.T. Identifiability in the whole of the two – dimensinal nonlinear equation of heat conductivity // Abstracts of the International Conference "Inverse Problems: Modeling and Simulation" held on 2004 June 07-12,TURKEY - Fethiye, 2004. - P. 24–25.

[3] Bektemesov M.A., Mukhambetzhanov S.T., Kabulkhamitov G.T. About one inverse problem of the theory of isothermal filtration // Abstracts of the International Conference "Inverse Problems: Modeling and Simulation" held on 2004 June 07-12,TURKEY - Fethiye, 2004. - P. 21–24.