

# Динамика упругой среды при действии трансзвуковых транспортных нагрузок\*

Л.А. АЛЕКСЕЕВА  
*Институт Математики МОН РК*  
e-mail: alexeeva47@mail.ru

Г.К. КАЙШИБАЕВА  
e-mail: gulnarkaishi@mail.ru

## Аннотация

Исследована система уравнений Ламэ и ее фундаментальные решения, описывающие движение упругой среды под действием движущегося источника возмущений. Рассмотрены вопросы возникновения ударных волн, которые появляются в среде под воздействием трансзвукового и сверхзвукового источника возмущений, и предложены условия на скачках решений и их производных на фронтах ударных волн. Представлены некоторые результаты вычислений, описывающие упругую среду под воздействием трансзвуковых нагрузок.

Математическое моделирование разнообразных процессов, связанных с передвижением транспорта в различных средах, либо перемещением транспортируемых грузов в тоннелях и трубопроводах различного назначения приводит к решению краевых задач механики сплошных сред в классе "бегущих" функций, параметрических и автомодельных по ряду переменных. Параметр задачи - скорость движения источника возмущений в среде - существенно влияет на тип уравнений движения, который зависит от скоростей распространения волн в средах, так называемых *звуковых скоростей*. Их может быть несколько в зависимости от вида волн. Тип дифференциальных уравнений, описывающих движение среды, меняется в зависимости от отношения скорости источника возмущений к звуковым скоростям (чисел Маха).

Здесь рассмотрены обобщенные решения уравнений движения изотропной упругой среды (уравнений Ламе) при трансзвуковых скоростях движения источника возмущений. В этом случае уравнения в подвижной системе координат становятся эллиптико-гиперболическими. Сдвиговые возмущения становятся сверхзвуковыми, а объемные деформации распространяются с дозвуковой скоростью. При этом возникают ударные волны. Получены условия на скачки решений и их производных на фронтах ударных

---

\*

волн. Приведены результаты численных экспериментов для трансзвуковых транспортных нагрузок.

**1. Транспортные решения уравнений Ламе. Числа Маха.** Рассмотрим изотропную упругую среду, заданную параметрами Ламе  $\lambda, \mu$ , плотностью  $\rho$ . Обозначим  $u_i$  - компоненты вектора перемещений  $u$ ;  $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$  - компоненты тензора напряжений и деформаций, связанные законом Гука:

$$\sigma_{ij} = \lambda \operatorname{div} u \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\}, \quad i, j, k = 3. \quad (1)$$

Здесь  $(x_1, x_2, x_3)$  - лагранжевы декартовы координаты точек упругой среды.

Пусть сила, действующая в среде, движется с постоянной скоростью  $c$  вдоль координатной оси  $X_3$  и в подвижной системе координат не зависит от  $t$ :  $G = G(x_1, x_2, x_3 + ct)$ . Будем искать решения (4) такой же структуры:  $u = u(x_1, x_2, x_3 + ct)$ , которые назовем *транспортными*. В подвижной системе координат  $x' = (x'_1, x'_2, x'_3) = (x_1, x_2, x_3 + ct)$  уравнения Ламе приводятся к виду:

$$A_j^i \left( \frac{\partial}{\partial x'} \right) u_i = \left\{ (M_1^{-2} - M_2^{-2}) \frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial x'_j} + \left( M_2^{-2} \Delta - \frac{\partial^2}{\partial x'_3{}^2} \right) \delta_j^i \right\} u_i = -g_j \quad (2)$$

Здесь  $g_j = c^{-2} G_j$ ,  $M_j = c/c_j$  - числа Маха ( $M_1 < M_2$ ). При  $M_j < 1$  ( $j = 1, 2$ ) нагрузка дозвуковая, система уравнений эллиптического типа; если нагрузка сверхзвуковая,  $M_j > 1$  ( $j = 1, 2$ ) система становится гиперболической; если скорость межзвуковая (*трансзвуковая*),  $M_1 < 1, M_2 > 1$  и тип уравнений гиперболо-эллиптический. При звуковых скоростях уравнения параболо-эллиптические, если  $M_2 = 1$ , а при  $M_1 = 1$  становятся параболо-гиперболическими.

При сверхзвуковых скоростях кинематические и динамические условия совместности решений на фронтах ударных волн имеют вид [1]:

$$[u]_F = 0, \quad [h_z u_{i,j} - h_j u_{i,3}]_F = 0, \quad [\sigma_{ij} h_j - \rho c^2 h_3 u_{i,3}]_F = 0.$$

**2. Фундаментальные решения.** При решении краевых задач важную роль играют фундаментальные решения, которые описывают динамику среды при действии сосредоточенных источников различного типа. Рассмотрим  $\hat{U}_k^i$  - матрицу фундаментальных решений уравнения движения (14):

$$A_i^j \left( \frac{\partial}{\partial x'} \right) \hat{U}_j^k + \delta(x') \delta_i^k = 0, \quad i, j = 3, \quad (3)$$

удовлетворяющую условиям затухания на бесконечности:  $\hat{U}_i^k \rightarrow 0, \quad \partial_j \hat{U}_i^k \rightarrow 0$  при  $x' \rightarrow \infty$ . Приведем вид  $\hat{U}_i^k$  для разных скоростей  $c$ , который получен с использованием преобразования Фурье, имеющего вид [3]:

$$\bar{U}_i^j = \frac{M_2^2 \delta_{ij}}{(\|\xi\|^2 - M_2^2 \xi_3^2)} - \frac{\xi_i \xi_j}{\xi_3^2} \left( \frac{1}{\|\xi\|^2 - M_2^2 \xi_3^2} - \frac{1}{\|\xi\|^2 - M_1^2 \xi_3^2} \right) \quad (4)$$

Откуда следует:  $U_i^j(x, z) = M_2^2 \delta_i^j f_{02}(\|x\|, z) + (f_{21,ij}(\|x\|, z) - f_{22,ij}(\|x\|, z))$ , где  $f_{km}$  - оригиналы функции:  $\hat{f}_{km} = \frac{\xi_3^{-k}}{\|\xi\|^2 - M_k^2 \xi_3^2}$ , вид которых существенно зависит от размерности задачи и чисел Маха (см.[2]). В дозвуковом случае знаменатель отличен от нуля и для их построения можно использовать фундаментальное решение уравнения Лапласа, в сверхзвуковом случае используем фундаментальное решение волнового уравнения.

Восстановление оригиналов компонент тензора перемещений сводится к дифференцированию этих функций. При дозвуковых скоростях ( $M_k < 1$ ):

$$4\pi f_{ok}(\|x\|, z) = (m_k^2 \|x\|^2 + z^2)^{-1/2}, \quad 4\pi f_{1k} = \operatorname{sgn} |z| \ln \left( (|z| + V_k^+) / m_k \|x\| \right),$$

$$4\pi f_{2k} = |z| \ln \left( (|z| + V_k^+) / m_k \|x\| \right) - V_k^+ + m_k \|x\|;$$

при сверхзвуковых скоростях ( $M_k > 1$ ):

$$2\pi f_{ok}(\|x\|, z) = \theta(z - m_k \|x\|) (z^2 - m_k^2 \|x\|^2)^{-1/2},$$

$$2\pi f_{1k} = \theta(z - m_k \|x\|) \ln \left( (z + V_k^-) / m_k \|x\| \right),$$

$$2\pi f_{2k} = \theta(z - m_k \|x\|) \left( z \ln \left( (z + V_k^-) / m_k \|x\| \right) - V_k^- \right).$$

Здесь  $V_k^+ = (z^2 + m_k^2 \|x\|^2)^{1/2}$ ,  $V_k^- = \theta(z - m_k \|x\|) (z^2 - m_k^2 \|x\|^2)^{1/2}$ ,  $\theta_k = \theta(z - m_k \|x\|)$ ,  $\theta(z)$  - функция Хевисайда. Легко выделяются объемные и сдвиговые составляющие тензора  $\hat{U}$ :  $\hat{U}_j^i = \hat{U}_{j1}^i + \hat{U}_{j2}^i$ ,  $\hat{U}_{j1}^i = c^{-2} f_{21'ij}$ ,  $\hat{U}_{j2}^i = c_2^{-2} \delta_j^i f_{02} - \nu^{-2} f_{22'ij}$ .  $\hat{U}_{j1}^i$  описывает деформации сжатия-растяжения, которые распространяются в упругой среде со скоростью  $c_1$ , а  $\hat{U}_{j2}^i$  - сдвиговые деформации, которые распространяются медленнее со скоростью  $c_2$ . На поверхности  $z = m_k \|x\|$  тензор Грина сингулярен.

В сверхзвуковом случае носителем функций является конус  $z > m_k \|x\|$ . Последнее является *условием излучения*, т.к. из физических соображений вне этого конуса перемещения упругой среды отсутствуют в силу конечности скорости распространения возмущений, которая не может быть выше соответствующей звуковой для определенного типа деформаций. Заметим, что эти условия появляются в результате построения решения задачи для объемной и сдвиговой составляющей тензора Грина отдельно в зависимости от скорости бегущей нагрузки.

Для произвольной интегрируемой транспортной силы  $G$  соответствующее решение уравнения Ламе имеет вид свертки

$$\hat{u}_i = \hat{U}_i^k * G_k = \int_{R^3} U_i^k(x' - y) G_k(y) dy_1 \dots dy_N. \quad (5)$$

Если транспортная нагрузка сосредоточена на цилиндрической поверхности  $S$ , образующая которой параллельна оси  $Z$ , то ее можно описать сингулярной функцией с компонентами  $g_k = g_k(x, z) \delta_S(x, z)$  - простой слой на цилиндре. Тогда решение имеет вид:

$$u_i(x, z) = \int_S U_i^k(x' - y) G_k(y) dS(y).$$

Исследование динамики упругой среды при до- и сверхзвуковых скоростях движения проведено в [3,4]. Здесь рассмотрен трансзвуковой случай. Проведены численные эксперименты по исследованию динамики упругой среды при движении вертикальной транспортной нагрузки вдоль полосы с трансзвуковой скоростью.

**3. Динамика упругой среды при действии трансзвуковых нагрузок на полосу** Проведены численные эксперименты по исследованию динамики упругой среды при действии вертикальной транспортной нагрузки. Бегущая нагрузка  $P(0,1,0)$  движется по полосе  $\{-1 < x_1 < 1, x_2 = 0, 0 < z < +2\}$  с трансзвуковой скоростью  $v : c_2 < v < c_1$  (где  $c_1$  скорость продольных и  $c_2$  поперечных волн соответственно). Значения чисел Маха для расчетов взяты  $M_1 = 0.8333$   $M_2 = 1.25$ . На рисунке 1 представлена проекция векторных полей в плоскости  $(x_2, z)$ , параллельной скорости движения. Проекция векторного поля в плоскости перпендикулярной скорости движения имеет аналогичный характер, рисунок 2. Движущаяся нагрузка

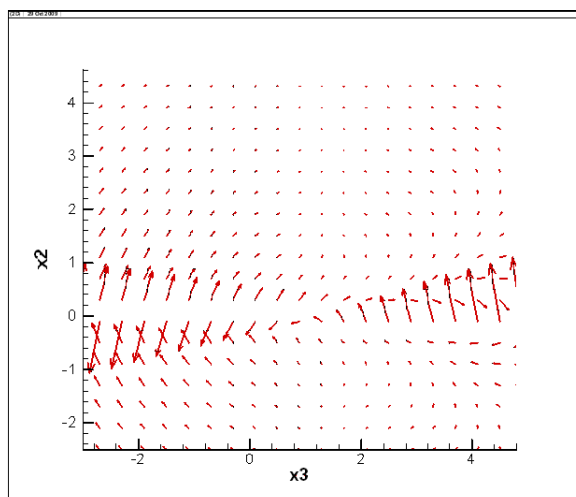


Рис. 1: Проекция поля перемещений ( $U_2:U_3$ ) на плоскость  $(X_2, Z)$  для чисел Маха  $M_1 = 0.8333, M_2 = 1.25$ .

в плоскости  $(x_1, z)$  проявляется сильнее. На рисунке 3 представлена картина векторного поля перемещений перпендикулярных скорости движения той же нагрузки в плоскости  $(x_1, x_2)$ . Видны развитые круговые движения расхождения частиц упругой среды вокруг оси движения нагрузки, за ней.

В случае сингулярных сил другого вида для построения обобщенного решения уравнений (2) следует использовать формулу свертки (8) согласно ее определению для обобщенных функций

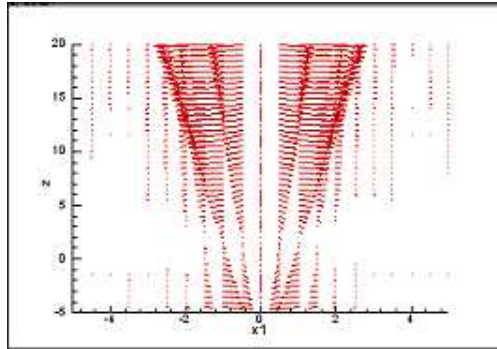


Рис. 2: Проекция поля перемещений ( $U_1:U_3$ ) на на плоскость  $(x_1, x_3)$  при действии вертикальной нагрузки  $P(0, -1, 0)$  на полосе

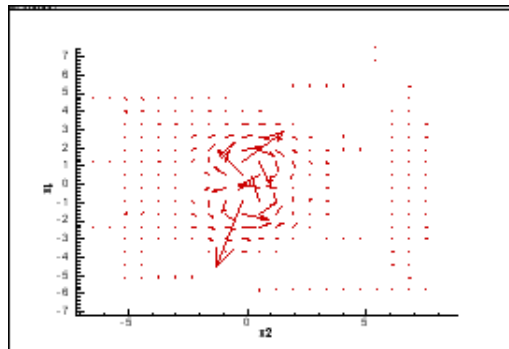


Рис. 3: Проекция поля перемещений ( $U_1:U_2$ ) на плоскость  $(x_1, x_2)$  Здесь  $M_1=0.8333$  ,  $M_2=1.25$

## Список литературы

- [1] Петрашень Г.И. Основы математической теории распространения упругих волн.- В кн. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Л. 1978. Вып.XVIII, 248с.
- [2] Алексеева Л.А.Фундаментальные решения в упругом пространстве в случае бегущих нагрузок // Прикладная математика и механика. 1991. Т.55. №5. С.854-862.
- [3] Alexeyeva L.A., Kaishybaeva G.K. Mathematical model of array dynamics in the vicinity of extended underground structures at action of moving loadings. //Intern.Journ Mathematics and Computers Simulation. 2004. V.67. № 4-5. P.441-450.
- [4] Г.К. Кайшибаева. Напряженно-деформированное состояние упругой среды при действии сосредоточенных сверхзвуковых нагрузок. Математический журнал. Алматы 2006. Т.6 N4 (22) 9с.