

Решение трехмерного комплексного уравнения Гельмгольца методом конечных объемов.*

ПЕТУХОВ А.В.

Институт Вычислительной Математики и Математической Геофизики СО РАН.
e-mail: petukhov@lapasrv.sscs.ru

Рассматриваются численные методы решения трехмерных смешанных краевых задач для комплексного уравнения Гельмгольца, описывающего электромагнитные поля с гармонической временной зависимостью. Предлагаются бездивергентные конечно-объемные аппроксимации на параллелепипедальных и тетраэдральных сетках. Вычисления локальных матриц баланса и сборка глобальной матрицы основаны на поэлементной технологии. Для итерационного решения получаемых вещественной системы линейных алгебраических уравнений с несимметричной разреженной матрицей и комплексной системы линейных алгебраических уравнений с неэрмитовой кососимметричной матрицей высоких порядков описываются предобусловленные методы сопряженных направлений. Приводятся результаты численных экспериментов для серии модельных задач на последовательности сгущающихся сеток.

1. Постановка задачи.

Рассматривается система уравнений Максвелла, которая в предположении распределения векторных электромагнитных полей с гармонической зависимостью от времени приводится к виду

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= i\omega \dot{\epsilon} \mathbf{E} + \mathbf{J}, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -i\omega \dot{\mu} \mathbf{H}, \\ \nabla \cdot (\epsilon_r \mathbf{E}) &= \rho / \epsilon_0, \\ \nabla \cdot (\mu_r \mathbf{H}) &= 0, \\ \dot{\epsilon} &= \epsilon_0 \epsilon_r - i\sigma^e / \omega, \quad \dot{\mu} = \mu_0 \mu_r - i\sigma^m / \omega\end{aligned}\tag{1}$$

где i — есть мнимая единица, ω - круговая частота изменения решения во времени, \mathbf{E} , \mathbf{H} - амплитуды напряженности электрического и магнитного поля соответственно, \mathbf{J} и ρ - плотности стороннего электрического тока и объемного заряда, ϵ_0 и μ_0 , ϵ_r и μ_r - диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума и рассматриваемой среды, σ^e и σ^m - электрическая и магнитная проводимости.

Решение системы уравнений (1) ищется в ограниченной области Ω с границей $S = S_0 \cup S_1$, где на S_0 ставится условие идеально проводящей электрической стенки

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0,\tag{2}$$

а на S_1 - условие “волнового входа”

$$-\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] = \mathbf{E}_0,\tag{3}$$

*Работа поддержана грантом РФФИ N 08-01-00526

где \mathbf{n} - вектор внешней нормали к границе, а \mathbf{E}_0 - распределение внешнего поля излучения.

Будем полагать, что расчетная область Ω состоит из подобластей $\Omega_k, k = 1, 2, \dots, s$ постоянными материальными свойствами, а на каждой внутренней границе Γ их раздела выполняются условия сопряжения

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot (\sigma_e^1 \mathbf{E}_1 - \sigma_e^2 \mathbf{E}_2) &= 0, & \sigma_e &= i\omega \dot{\epsilon}, \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) &= 0, \\ \mathbf{n} \cdot (\sigma_m^1 \mathbf{H}_1 - \sigma_m^2 \mathbf{H}_2) &= 0, & \sigma_m &= i\omega \dot{\mu}, \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где \mathbf{n} - вектор нормали к границе Γ , а индексы “1, 2” относятся к разным сторонам ее поверхности.

Соотношения (1) при $\rho = \sigma^m = 0$ после не сложных преобразований приводятся к векторному уравнению

$$\nabla \times \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E} - \kappa_0^2 \epsilon_r \mathbf{E} = -i\kappa_0 Z_0 \mathbf{J}, \quad (5)$$

в котором полагается

$$\kappa_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}, \quad \dot{\epsilon}_r = \frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon_0}. \quad (6)$$

Решению краевых задач для векторного уравнения (5) посвящено большое количество работ отечественных и зарубежных авторов (для примера, см. [1]-[3] и цитируемую там литературу). Как правило, при решении трехмерных практических задач в расчетной области строится адаптивная сетка Ω^h , состоящая из набора конечных элементов E_l в форме параллелепипедов или тетраэдров, таким образом, чтобы внешние и внутренние граничные поверхности составлялись из граней E_l , граничные ребра - составлялись из ребер элементов E_l , а граничные вершины - являлись узлами сетки.

Аппроксимация уравнения (5) с учетом внешних и внутренних краевых условий осуществляется в различных публикациях с помощью методов конечных объемов или элементов. Причем в последнем подходе большое распространение получили алгоритмы на основе использования векторных базисных функций, обеспечивающие нулевую дивергенцию для приближенного сеточного решения внутри конечных элементов. Следует отметить, что построение “бездивергентных” аппроксимаций имеет важное значение, так как если сеточный аналог выражения $div \mathbf{E}$ не равен нулю, то это приводит к появлению ложных решений, не соответствующих физическому смыслу.

2. Бездивергентная конечно-объемная аппроксимация.

В дальнейшем мы будем предполагать отсутствие сторонних токов $\mathbf{J} = 0$, и уравнение (4) в подобластях с постоянными материальными параметрами приведем к векторному однородному уравнению Гельмгольца

$$-\Delta \mathbf{E} + \kappa \mathbf{E} = 0, \quad \kappa = -\mu_r \kappa_0^2 \dot{\epsilon}_r, \quad (7)$$

которое при условии выводится для гладкого на основе операторного равенства

$$rot rot = -\Delta + grad div. \quad (8)$$

На внутренних границах раздела различных сред имеет место скачек нормальных компонент электрического поля.

Конкретизируем вид граничных условий в декартовой трехмерной системе координат с учетом того, что уравнение (7) справедливо, если выполняется равенство

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}, \quad (9)$$

во всей замкнутой области $\bar{\Omega} = \Omega \cup S$.

Пусть $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta})$ - некоторая ортогональная система координат в точке \mathbf{r} границы S , где \mathbf{n} есть внешняя нормаль, а $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\eta}$ - касательные направления к поверхности S . Тогда равенство нулю тангенциальных составляющих поля на металлической (идеально проводящей) стенке S_0 и равенство касательного поля некоторому распределению внешнего поля излучения на "волновом входе" в совокупности с условием (9) позволяет корректно формулировать краевые условия на внешней границе, которые в общем случае являются не распадающимися.

Отметим такой важный момент, что поскольку мы удовлетворяем условию нулевой дивергенции на всей границе расчетной области, то легко убедиться, что решение уравнения Гельмгольца (7) также будет удовлетворять условию (10) во всей области.

В дальнейшем при аппроксимации краевой задачи вида (9), (10), (2), (3) будем предполагать существование ее единственного классического решения во всех внутренних точках $\mathbf{r} \in \Omega$, достаточно гладкого вплоть до границы $S \cup \Gamma$.

Рассмотрим неструктурированную (адаптивную) сетку, содержащую узлы $P_l \in \bar{\Omega}, l = 1, \dots, N$, по которым построены непересекающиеся элементы (тетраэдры либо параллелепипеды) $E_m, m = 1, \dots, M$, полностью покрывающие расчетную область, т.е. $\Omega = \cup_m E_m$.

Пусть также $V_l, l = 1, \dots, N$ - множество конечных объемов, двойственное к множеству E_m , причем для граничных узлов $P_l \in S$ под конечным объемом подразумевается его "внутренняя" часть $V_l \cap \Omega$. В силу предполагаемой адаптивности сетки, внутренние точки тетраэдра не могут содержать точек из S или Γ , а лежащие на граничной поверхности сеточные грани не могут иметь внутренних точек, принадлежащих граничным ребрам расчетной области.

Технология метода конечных объемов для параллелепипедальных элементов и тетраэдральных элементов, вычисления локальных матриц баланса и сборка глобальной матрицы основанные на поэлементной технологии хорошо изложены в книге В.П. Ильина [1]. В работе [2] проведена адаптация метода для барицентрических конечных объемов на тетраэдральной сетке.

3. Итерационные методы решения СЛАУ

Полученные системы линейных алгебраических уравнений решаются при помощи широко известных методов сопряженных и бисопряженных направлений подпространств Крылова (CG, BiCG, BiCGStab) описанных в [5], [6] и предобусловленных методом неполной факторизации Айзенштата с эмпирической формулой для итерационного параметра.

4. Тестовые задачи

В качестве тестовой задачи рассматривается волновод с линейными размерами $a = 72, b = 34, c = 200$. на грани $z = 200$ задается условие "волнового входа" $S_1 : \mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_0$, на остальной части границы расчетной области задавалось условие $S_0 : \mathbf{n} \times \mathbf{E}$. Во всех тестах полагается $\mu_r = 1, \omega = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^9$.

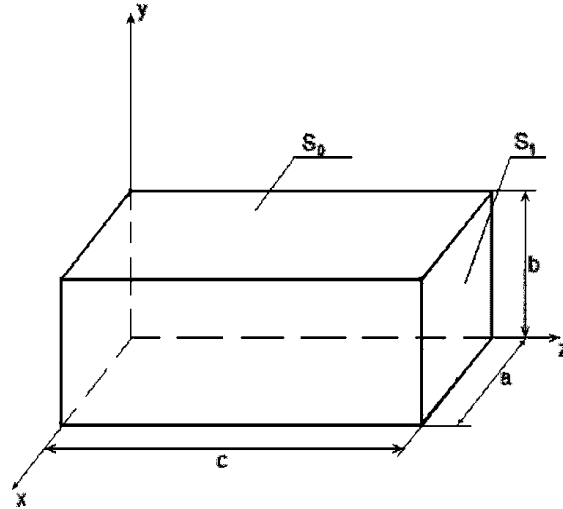


Рис. 1. Расчетная область для модельных задач

Тест 1: $\varepsilon_r = 1, \mathbf{E}_0 = \mathbf{e}_y \sin(\frac{\pi x}{a})$. Точное решение задачи является вещественным и имеет только одну компоненту E_y .

Тест 2: $\varepsilon_r = 2 - 0.1i, \mathbf{E}_0 = \mathbf{e}_y \sin(\frac{\pi x}{a})$. В данном случае решение комплексно, но как и в первом случае имеет однукомпоненту.

Тест 3: $\varepsilon_r = 1$, а возбуждаемое поле имеет две компоненты $E_x^0 = \frac{\pi}{a} \cos(\frac{\pi}{a}) \sin(\frac{\pi}{b}), E_y^0 = \frac{\pi}{b} \sin(\frac{\pi}{a}) \cos(\frac{\pi}{b})$, при этом искомое поле является вещественным и имеет все три не нулевые компоненты.

Тест 4: $\varepsilon_r = 1$, при $0 \leq z \leq c/2$ и $\varepsilon_r = 5$, при $c/2 \leq z \leq c$, возбуждаемое поле берется как и в первых двух тестах $\mathbf{E}_0 = \mathbf{e}_y \sin(\frac{\pi x}{a})$. Точное решение задачи является вещественным и имеет только одну компоненту E_y .

Численное решение рассматриваемых задач проводится на последовательности вложенных равномерных параллелепипедальных сеток со следующими разбиениями: $8 \times 4 \times 20, 14 \times 6 \times 40, 28 \times 14 \times 80, 56 \times 28 \times 160$ по оси x, y и z соответственно. Для получения тетраэдральных сеток каждый параллелепипед делится на шесть тетраэдров.

Целью экспериментов является исследование сходимости сеточных решений при увеличении числа шагов сетки для различных вариантов методов конечных объемов.

Список литературы

- [1] Ильин В.П., Соловьев С.А. О решении двумерной краевой задачи индукционного каротажа. // Тр.конф. "Математ. модели и методы их исследования Красноярск, изд. ИВМ СО РАН, 2001. с. 1123–1135.
- [2] IGARASHI H. On the property of the curl-curl matrix in finite element analysis with edge elements. // IEEE Trans. on Magnetics, 2001. v. 37, N 5. P. 3129–3132.

- [3] Соловейчик Ю.Г., Персова М.Г., Тригубович Г.М. Математическое моделирование процесса становления осесимметричного поля вертикальной электрической линии. // СибЖИМ, 2003. т. 6, N 2. С. 107–125.
- [4] Ильин В.П. Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2000.
- [5] Ильин В.П. Методы и технологии конечных элементов. Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2007.
- [6] SAAD Y. Iterative Method for Sparse Linear Systems. N.Y.:PWS Publish., 1996.