

МОДЕЛЬ МЕЛКОЙ ВОДЫ НА СФЕРЕ: ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ *

А.В. ИВАНОВА

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

e-mail: ivanovaannav@gmail.com

В.В. ОСТАПЕНКО

Новосибирский государственный университет, Новосибирск

А.А. ЧЕРЕВКО

А.П. ЧУПАХИН

Построена система законов сохранения массы и полного импульса для уравнений мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере. На основе явной двухслойной по времени разностной схемы проведено численное моделирование процесса эволюции двумерных нестационарных волн на вращающейся притягивающей сфере. Рассчитано распространение возмущений от хребтов различной геометрии.

ВВЕДЕНИЕ

Модель мелкой воды широко используется для описания длинноволновых движений жидкости. При переносе ее на сферу «условие мелкой воды» означает малую глубину жидкого слоя относительно радиуса сферы (планеты). Такая модель описывает крупномасштабные движения в атмосфере и Мировом океане, протекающие достаточно длительное время, чтобы эффект вращения планеты оказывал своё влияние.

Модель мелкой воды на сфере оказывается сложнее для аналитического исследования по сравнению с классической [1, 2]. Важную роль при её изучении играют численные методы. В работе для случая двумерных течений предложена консервативная разностная схема, аппроксимирующая дивергентную форму записи уравнений мелкой воды на вращающейся сфере, полученную из интегральных законов сохранения. Приведены численные расчеты задачи о распространении волн от возмущения в виде шеврона, демонстрирующие эффективность предложенной разностной схемы для сквозного расчета разрывных решений для уравнений мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере в двумерном случае.

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Модель мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере была предложена А.П. Чупахиним и А.А. Черевко в [1] и представляет собой гиперболическую систему дифференциальных уравнений на сфере. Эта система записана в недивергентной форме, в силу чего на её основе можно строить только непрерывные решения, описывающие гладкие течения мелкой воды. Поскольку она является гиперболической и допускает разрывные решения, для корректного описания которых, её можно сформулировать, как полную систему законов сохранения. Дифференциальные законы сохранения массы и импульса, полученные из интегральных законов сохранения можно представить в

*Работа выполнена при поддержке Интеграционного проекта СО РАН №40, гранта Министерства образования и науки РФ №2.1.1/3543, гранта НШ - 4368.2010.1.

следующем виде:

$$(rh \sin \theta)_t + (q \sin \theta)_\theta + Q_\varphi = 0, \quad (1)$$

$$(rq \sin \theta)_t + \left((qv + \frac{gh^2}{2}) \sin \theta \right)_\theta + (qV)_\varphi - \left(QV + \frac{gh^2}{2} \right) \cos \theta = W(Wh \sin^2 \theta \cos \theta + Q \sin 2\theta), \quad (2)$$

$$(rQ \sin \theta)_t + (Qv \sin \theta)_\theta + \left(QV + \frac{gh^2}{2} \right)_\varphi + qV \cos \theta = -Wq \sin 2\theta, \quad (3)$$

где $0 < \theta < \pi$ - широта, $0 \leq \varphi < 2\pi$ - долгота; v - меридиональная, V - долготная компоненты скорости, $h > 0$ - глубина слоя, $q = hv$ и $Q = hV$ - компоненты расхода, g - ускорение свободного падения, Ω - угловая скорость вращения сферы, $W = \Omega r$. Закон сохранения энергии является выпуклым расширением.

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА

В работе предложена разностная схема, аппроксимирующая дивергентную форму записи уравнений мелкой воды на вращающейся сфере (1-3), для расчета двумерных течений, зависящих как от широты, так и от долготы. Схема построена методом расщепления по физическим процессам на разнесенной по пространству сетке, на которой компоненты скорости v, V и расхода q, Q вычисляются в целых узлах, а глубина h в полуцелых узлах, расположенных в центрах ячеек [3].

Уравнение для закона сохранения массы аппроксимируется явной разностной схемой

$$r \sin \theta_i \frac{h_{\alpha,\beta}^{n+1} - h_{\alpha,\beta}^n}{\tau_n} + \frac{(q_{i+1,\beta}^n \sin \theta_{i+1} - q_{i,\beta}^n \sin \theta_i)}{\Delta \theta} + \frac{(Q_{\alpha,j+1}^n - Q_{\alpha,j}^n)}{\Delta \varphi} = 0, \quad (4)$$

где $i = \overline{0, N-1}$, $j = \overline{0, M-1}$, $\alpha = i + 1/2$, $\beta = j + 1/2$, τ_n - шаг по времени на n -ом временном слое

$$\tau_n = \sum_{k=0}^{n-1} \tau_k.$$

После определения по этой схеме глубин $h_{\alpha,\beta}^{n+1}$ в центрах ячеек, предварительные значения расхода $\tilde{q}_{\alpha,\beta}^{n+1}$ и $\tilde{Q}_{\alpha,\beta}^{n+1}$ находятся путем аппроксимации уравнений для закона сохранения импульса.

$$r \sin \theta_i \frac{\tilde{q}_{i,j}^{n+1} - q_{i,j}^n}{\tau_n} + \frac{(qv)_{i+1,j}^n \sin \theta_{i+1} - (qv)_{i-1,j}^n \sin \theta_{i-1}}{2\Delta \theta} + \frac{(qV)_{i,j+1}^n - (qV)_{i,j-1}^n}{2\Delta \varphi} + \frac{g}{2} \left(\frac{(h^2)_{\alpha,j}^{n+1} - (h^2)_{\alpha-1,j}^{n+1}}{\Delta \theta} \right) = W^2 h_{i,j}^{n+1} \sin^2 \theta_i \cos \theta_i + (W_1)_{i,j}^n \quad (5)$$

$$r \sin \theta_i \frac{\tilde{Q}_{i,j}^{n+1} - Q_{i,j}^n}{\tau_n} + \frac{(Qv)_{i+1,j}^n \sin \theta_{i+1} - (Qv)_{i-1,j}^n \sin \theta_{i-1}}{2\Delta \theta} + \frac{(QV)_{i,j+1}^n - (QV)_{i,j-1}^n}{2\Delta \varphi} + \frac{g}{2} \left(\frac{(h^2)_{i,\beta}^{n+1} - (h^2)_{i,\beta-1}^{n+1}}{\Delta \varphi} \right) = (W_2)_{i,j}^n \quad (6)$$

В правые части разностных уравнений (5) и (6) введены искусственные вязкости $(W_k)_{i,j}^n$, $k = 1, 2$. После определения величин \tilde{q}^{n+1} и \tilde{Q}^{n+1} окончательные значения расходов q^{n+1} и Q^{n+1} находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} \tilde{q}_{i,j}^{n+1} = WQ_{i,j}^{n+1} \sin^2 \theta_i + Q_{i,j}^{n+1} V_{i,j}^n \cos \theta_i, \\ \tilde{Q}_{i,j}^{n+1} = q_{i,j}^{n+1} V_{i,j}^n \cos \theta_i - Wq_{i,j}^{n+1} \sin^2 \theta_i. \end{cases} \quad (7)$$

Данная схема с учетом искусственных вязкостей, коэффициенты которых выбираются по результатам тестовых расчетов, имеет первый порядок аппроксимации как по времени, так и по пространству.

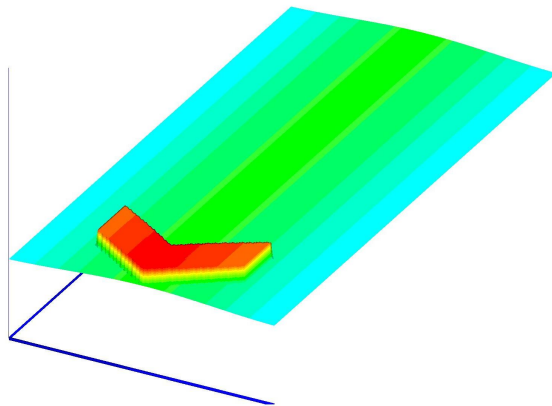
ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

На рис. 1 в пять последовательных моментов времени приведены результаты расчета задачи о распространении волн от возмущения в виде шеврона. В начальный момент профиль жидкости на сфере в целом и на возвышенной области соответствует состояниям равновесия (рис. 1а), задаваемым формулой

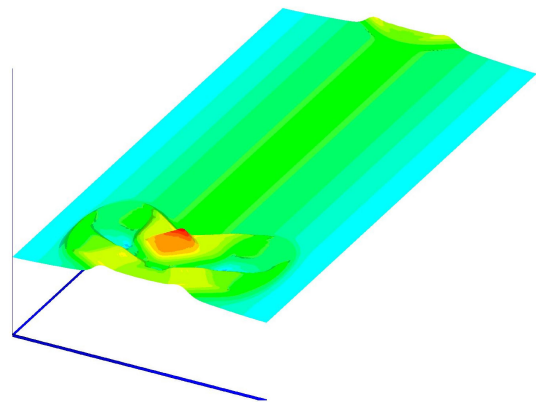
$$h_0(\theta) = \begin{cases} h_1 + \gamma \sin^2 \theta, \\ h_2 + \gamma \sin^2 \theta, \end{cases} \quad \gamma = \frac{r_0^2}{8f_0}$$

где r_0 и f_0 - безразмерные параметры, связанные с числами Россби и Фруда.

Распространение возмущений происходит циклически, в каждом цикле при этом можно выделить четыре основных этапа. Первый этап – это кумулятивная струя, порождающая эффект фокусировки, при котором сталкиваются крылья шеврона и возмущение становится больше первоначального (рис. 1б). Затем, в результате распространения возмущений возникает максимальное возвышение свободной поверхности (рис. 1в). После этого в диаметрально противоположной части сферы от начального расположения шеврона образуется возмущение, по форме подобное исходному шеврону, но меньше по высоте и размеру (рис. 1г). Цикл завершается образованием шеврона меньшего масштаба и более «размытого» на том же месте, что и первоначальный (рис. 1д). Поскольку на устойчивых разрывах в модели мелкой воды происходит потеря полной энергии, то с течением времени они постепенно затухают и движение асимптотически выходит на состояние равновесия.



а (t=0, max h=0.645)



б (t=26, max h=0.650)

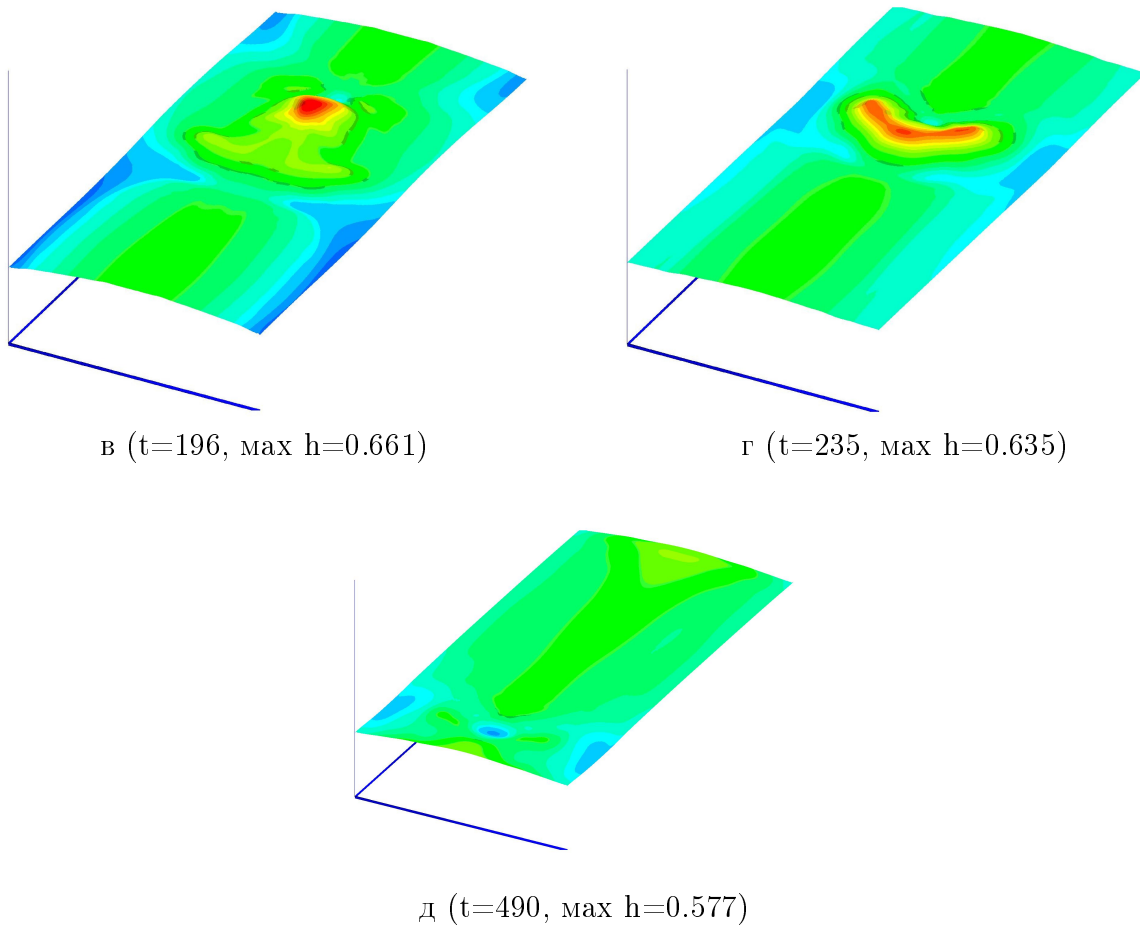


Рис. 1. Глубина жидкости в задаче о распространении волн от возмущения формы шеврон в разные моменты времени.

Список литературы

- [1] ЧЕРЕВКО А.А., ЧУПАХИН А.П. Уравнения модели мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере 1. Вывод и общие свойства // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 2. С. 37–45.
- [2] ЧЕРЕВКО А.А., ЧУПАХИН А.П. Уравнения модели мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере 2. Простые стационарные волны и звуковые характеристики // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 3. С. 82–96.
- [3] ИВАНОВА А.В., ОСТАПЕНКО В.В., ЧУПАХИН А.П. Численное моделирование течений мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, вып. 3. С. 30–45.