

СХОДИМОСТЬ МОМЕНТНОГО МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ *

И.А. БАНЩИКОВА

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск
e-mail: binna@ngs.ru

И.В. СУХОРУКОВ

Рассматривается задача линейной изотропной теории упругости для тела с кусочно-гладкой границей S , которая после обезразмеривания относительно линейных и упругих характеристик тела может быть сведена к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода для вектора фиктивных нагрузок. Для решения последнего предлагается использовать модификацию метода граничных элементов - метод моментов. Решение ищется в виде суммы рядов произведений фундаментального решения и его производных в заданных точках вдоль границ на искомые коэффициенты - моменты. Исследуется сходимость метода моментов на примере задачи Неймана для уравнения Лапласа для полуплоскости, что соответствует задаче о нахождении напряжений вокруг трещины.

Наряду с методами конечных элементов и конечных разностей для численно-аналитического анализа в механике в последнее время широкое применение находит метод граничных элементов. Его использование позволяет снизить размерность задачи за счет численной дискретизации не всей области, а только границы, что снижает число линейных уравнений системы и ведет к уменьшению компьютерных затрат [1,2]. В работе рассматривается одна из модификаций метода граничных элементов - метод моментов [3] применительно к решению задачи Неймана для уравнения Лапласа. Аналитическое решение исследуемой краевой задачи может быть получено для областей, имеющих простую геометрию (круг, полуплоскость), в общем же случае решение ищется приближенно с использованием численных методов путем аппроксимации или дискретизации границы (области). Требуемая точность решения, особенно в местах имеющих особенности, достигается, как правило, путем измельчения сетки или за счет аппроксимирующих функций высокого порядка. Рассматриваемая модификация метода граничных элементов, основанная на методе Галеркина, позволяет увеличивать точность решения, путем использования моментов более высокого порядка, снижая необходимость дополнительного дробления сетки.

Известно, что двумерная краевая задача о нахождении гармонической в области G функции $u(z) \in C(\bar{G})$, (z означает точку (x, y) плоскости R^2), имеющей на кусочно-гладкой границе S заданную непрерывную нормальную производную $\frac{\partial u}{\partial n} = t(z)$, $z \in S$ разрешима при любой непрерывной функции t , удовлетворяющей условию ортогональности $\int_S t(z) dS = 0$. Ее решение представляется в виде потенциала простого слоя $V(z) = \int_S \tau(\xi) \ln(|z - \xi|^{-1}) dS_\xi$, где для неизвестной плотности (фиктивной нагрузки) $\tau \in C(S)$ выполняется интегральное уравнение Фредгольма второго рода [4]

$$\tau(z) = \int_S K(z, \xi) \tau(\xi) dS_\xi + \frac{t(z)}{\pi}, \quad K(z, \xi) = \frac{\cos \psi_{z\xi}}{\pi |z - \xi|}. \quad (1)$$

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грантов № 11-01-00522, № 11-08-00845).

В случае верхней полуплоскости $y > 0$ для нагрузки имеем $\tau = t/\pi$ и решение $V(z)$ переписывается в виде

$$u(x, y) = u_a(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_S t(\xi_x) \ln((x - \xi_x)^2 + y^2) d\xi_x + C. \quad (2)$$

Константа C определяется значением функции u в некоторой точке верхней полуплоскости $u(x_0, y_0)$. Рассмотрим случай, когда $t \neq 0$ при $x \in [-a, a]$. При использовании метода граничных элементов граница разбивается на элементы. Разобьем отрезок $[-a, a]$ на n частей, тогда решение (2) можно представить в виде суммы

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^n u_i(x, y), \quad u_i(x, y) = -2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} t(\xi_x) U(x - \xi_x, y) d\xi_x, \quad (3)$$

$$U(x - \xi_x, y) = \frac{1}{4\pi} \ln((x - \xi_x)^2 + y^2) \quad (4)$$

U - фундаментальное решение уравнения Лапласа [4]. Раскладывая (4) в ряд Тейлора в центральной точке $(x_i^*, 0)$ каждого i -ого граничного элемента, перепишем (3):

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} t(\xi_x) \sum_{k=0}^{\infty} U_i^k (\xi_x - x_i^*)^k d\xi_x, \quad U_i^k = -\frac{2}{k!} \left. \frac{\partial^k U(x - \xi_x, y)}{\partial \xi_x^k} \right|_{\xi_x = x_i^*} \quad (5)$$

Ограничив суммирование по k в (5) решение может быть представлено в виде ряда произведений фундаментальных решений (и их производных) и моментов

$$u(x, y) = u_m(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^m U_i^k M_i^k, \quad M_i^k = \int_{x_i}^{x_{i+1}} t(\xi_x) (\xi_x - x_i^*)^k d\xi_x. \quad (6)$$

При расчете методом фиктивных нагрузок решение определяется по формулам [2]

$$u(x, y) = u_f(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} p_i(\xi_x) \ln((x - \xi_x)^2 + y^2) d\xi_x, \quad (7)$$

$$p_i(\xi_x) = \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} t(\xi_x) d\xi_x$$

На рис. *a* изображено решение уравнения Лапласа для разрывного граничного условия (линия 1)

$$t = \begin{cases} (0, 2x)^{-0,4}, & 0 \leq x \leq 1; \\ (-x)^{-0,4}, & -1 \leq x < 0; \\ 0, & x \notin [-1, 1] \end{cases} \quad (8)$$

при $n=20$ для $y = 0,05$ - линии 2 и $y = 0,5$ - линии 3. Сплошные и пунктирная линии 2 - аналитическое решение и результаты расчета согласно (6) и (7) практически совпадают, а при $y = 0,5$ отличить решения, полученное всеми тремя способами визуально уже невозможно.

На рис. *b* и *c* изображено отклонение аналитического решения от результатов расчета, полученных методом фиктивных нагрузок $|u_a(x, y) - u_f(x, y)|$ (штриховая линия 1), отклонение аналитического решения от результатов расчета методом моментов

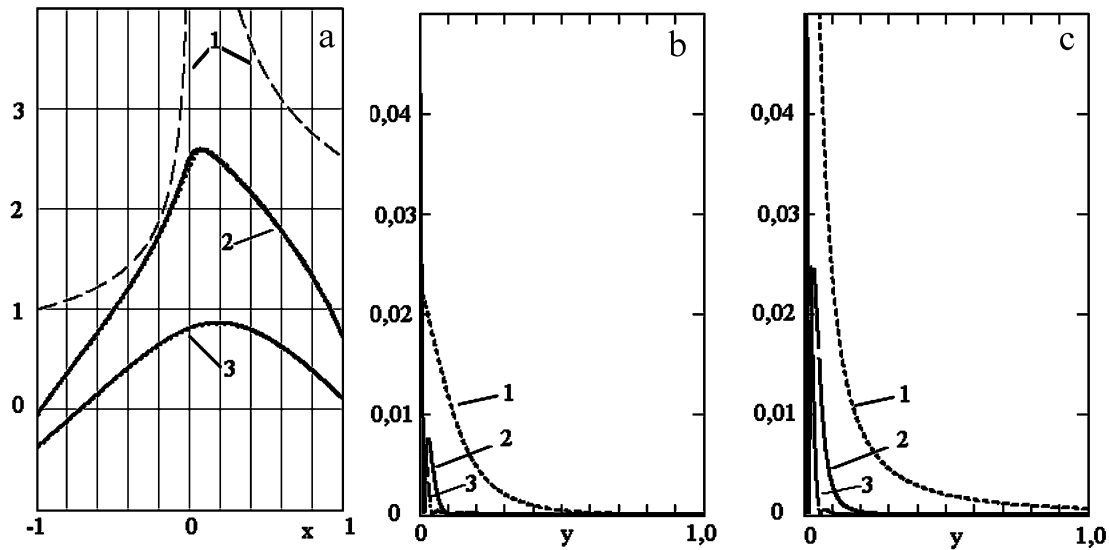


Рис. Аналитическое решение, расчет методом моментов и расчет методом фиктивных нагрузок $y = 0,05$ - линия 2 и $y = 0,5$ - линия 3 (a); отклонение аналитического решения от результатов расчета, полученных методом фиктивных нагрузок (штриховая линия 1), отклонение аналитического решения от результатов расчета методом моментов при $m=2$ (сплошная линия 2) и методом моментов при $m=4$ (сплошная линия 3) при $x = 0,2$ (b) и $x = 0$ (c)

$|u_a(x, y) - u_m(x, y)|$ при $m=2$ (сплошная линия 2) и методом моментов при $m=4$ (сплошная линия 3) при $x = 0,2$ (рис. b) и $x = 0$ (рис. c). Сравнение полученных данных расчета показывает, что метод моментов позволяет получить более точное решение, хотя в области непосредственной близости от границы требуется дополнительный анализ сходимости.

Исследуемый способ решения задачи Неймана для уравнения Лапласа для полуплоскости (соответственно задача о нахождении напряжений вокруг трещины), может быть обобщен на случай двумерной области в виде многоугольника (задача кручения стержня с многоугольным поперечным сечением).

Список литературы

- [1] Баженов В.Г., Игумнов Л.А. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.
- [2] Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. М.: Мир, 1987.
- [3] А.И. Левыкин, И.В. Сухоруков Анализ сходимости моментного метода граничных элементов // Тезисы докладов Международной конф. "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", Новосибирск, 2007, С. 517.
- [4] Владимиров С.В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.