

# МЕТОД ЭЛЕМЕНТОВ РЕЛАКСАЦИИ В МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Е.Е. Дерюгин

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск, Россия

## RELAXATION ELEMENT METHOD IN MECHANICS OF DEFORMED SOLID

Ye.Ye. Deryugin.

Institute of Strength Physics and Material Science SB RAS, Tomsk, Russia

*The derivation and application of the field of internal stresses in the solid under loading, undergoing plastic deformation in the local volume of the material, is laid down on the basis of the Relaxation Element Method method. This approach allows evolving effectively two problems of a deformed solid: description of the stress-strain state of the solid with the sites of different geometrical shapes and with different distributions of plastic deformation and simulation of the consequence of the involvement of separate structural elements into plastic deformation.*

### 1. Introduction

В основе метода элементов релаксации (МЭР) лежит фундаментальное свойство деформируемого твёрдого тела: пластическая деформация является сугубо релаксационным процессом. Основной задачей МЭР является определение изменения поля внутренних напряжений в объёме твердого тела в результате вовлечения структурных элементов в пластическую деформацию. В связи с этим МЭР позволяет эффективно решать две проблемы деформируемого твердого тела (ДТТ):

1. Описание напряженно-деформированного состояния твердого тела с очагами различной геометрической формы и с различными распределениями пластической деформации;
2. Моделирование последовательности вовлечения отдельных структурных элементов в пластическую деформацию.

Релаксация напряжений в локальном объеме в результате пластической деформации изменяет напряженное состояние во всем объеме твердого тела. Таким образом, структурный элемент, испытавший пластическую деформацию в окружении упруго деформирующейся матрицы, рассматривается как дефект определённого масштаба со своим полем внутренних напряжений, как элемент релаксации (ЭР).

Развиваемые модели на основе МЭР действуют по принципу клеточных автоматов. Расчетное поле разбивается на множество ячеек, играющих роль элементов структуры (например, зерен в поликристаллах). Каждая ячейка обладает способностью переключать состояние дискретным скачком напряжений (или пластической деформации), задаваемым определенным элементом релаксации, который помещается в центр ячейки. Уменьшение упругой энергии в ячейке сопровождается увеличением напряжений в окрестности очага ПД. Таким образом, элемент среды, испытавший пластическую деформацию, как концентратор напряжений влияет на напряженное состояние ближайших соседей. Поле внутренних напряжений ЭР меняет напряжённое состояние всех элементов структуры через определенный промежуток времени.

Вовлечение структурных элементов в пластическую деформацию осуществляется заданием критерия, например, критического напряжения сдвига  $\tau_{cr}$  в центре ячейки под действием внешнего приложенного напряжения  $\sigma$  (критерий Мизеса-Треска). Взаимодействие полей внутренних напряжений от структурных элементов, испытавших пластическую деформацию, происходит автоматически (по принципу суперпозиции).

В данной работе приводятся некоторые оригинальные результаты по расчёту полей внутренних напряжений в континууме с очагами пластической деформации и по результатам моделирования эффектов прерывистой текучести.

## 2. Напряженно-деформированное состояние континуума с очагом пластической деформации

В работах [1, 2] для плоско-напряжённого состояния рассмотрены задачи о внутренних напряжениях в твёрдом теле с очагом пластической деформации круговой формы. Рис. 1 иллюстрирует распределения компонент  $\Delta\sigma_y$ ,  $\Delta\sigma_x$ ,  $\Delta\sigma_{xy}$  поля внутренних напряжений в объёме материала для случая, когда пластическая деформация (ПД) в очаге вызывает релаксацию нормального напряжения вдоль оси  $y$  на величину  $\Delta\sigma$ . Показано, что тогда поле пластической деформации во всех точках очага характеризуется компонентами

$$\varepsilon_y^p = 3\Delta\sigma/E, \quad \varepsilon_x^p = -\Delta\sigma/E, \quad \varepsilon_{xy}^p = 0.$$

Здесь  $E$  – модуль Юнга.

Расчёты показывают, что поле напряжений вокруг очага крайне неоднородное. Максимальное и минимальное значения компоненты  $\Delta\sigma_y$  равны соответственно  $\Delta\sigma_{y\max} = 2\Delta\sigma$  и  $\Delta\sigma_{y\min} = -\Delta\sigma$ . На границе очага компоненты тензоров пластической деформации и напряжения терпят разрыв.

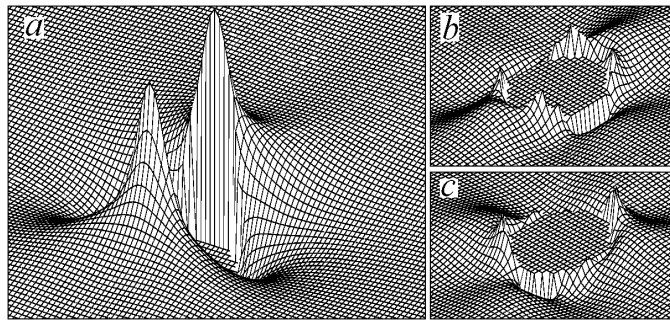


Рис. 1. Распределения компонент поля внутренних напряжений  $\sigma^*$ :  $\Delta\sigma_y(a)$ ,  $\Delta\sigma_x(b)$ ,  $\Delta\sigma_{xy}(c)$ .

Рис. 2 иллюстрирует случай распределения напряжений сдвига под углом  $45^\circ$  к оси растяжения  $\Delta\tau(x,y)$ , когда в очаге имеет место пластическая деформация чистого сдвига в направлении максимальных скалывающих напряжений (под углом  $45^\circ$  к оси растяжения), равная  $\gamma^p = 2\Delta\sigma/E$ .

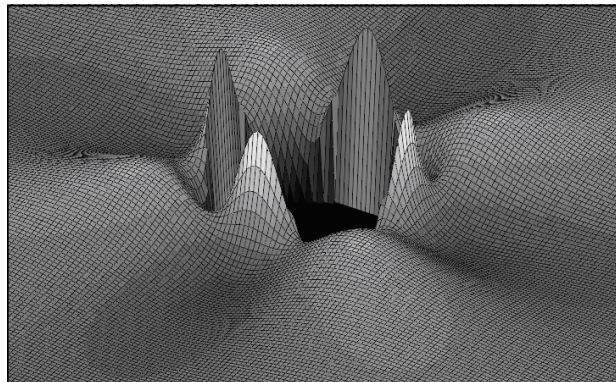


Рис. 2. Пространственное распределение напряжения  $\Delta\tau(x,y)$  в плоскости с очагом пластической деформации.

Релаксация напряжения на бесконечно малую величину  $d\sigma$  создаёт в сплошной среде элементарный дефект. Наличие такого дефекта не изменяет упругие свойства среды, следовательно, не влияет на решение краевых задач линейной теории упругости. Поэтому для внутренних полей напряжений подобных дефектов справедлив принцип суперпозиции. Интегрирование полей непрерывного распределения таких дефектов (элементарных ЭР) позволяет в некоторых случаях аналитически описывать гладкие поля напряжений и пластической деформации с градиентами.

В работе [2] приведено решение для семейства вложенных друг в друга ЭР с общим центром. Это позволило получить гладкое поле внутреннего напряжения сдвига в направлении под углом  $45^\circ$  к оси растяжения

$$\tau(x, y) = \Delta\sigma \left\{ \begin{array}{l} \frac{(\beta+1)a^2}{(\beta+3)r^2} \left[ \frac{3(\beta+3)a^2}{(\beta+5)r^2} - 2 \right] \left[ 1 - 8 \left( 1 - y^2/r_2 \right) y^2/r_2 \right], \text{ if } r^2 \geq a^2, \\ -1 + \left( \frac{r}{a} \right)^{\beta+1} \left\{ \frac{\beta^2 - 1}{2(\beta+3)(\beta+5)} \left[ 1 - 8 \left( 1 - y^2/r_2 \right) y^2/r_2 \right] + 1 \right\}, \text{ if } r^2 \leq a^2 \end{array} \right\}. \quad (1)$$

Здесь  $r$  - расстояние от центра семейства ЭР до точки с координатами  $(x, y)$ . На расстоянии  $h$  от границы очага наблюдается максимальный градиент пластической деформации

$$\text{grad} \varepsilon_y^p = 3\Delta\sigma(\beta+1)/Ea. \quad (2)$$

Для краткости выражение (1) приведено для случая  $h = 0$ . Параметр  $\beta$  в приведённых выражениях определяет величину градиентов напряжений и пластической деформации. Из выражения (2) следует, что с градиенты увеличиваются по мере увеличения  $\beta$ . Решение (1) соответствует гладкому полю пластической деформации сдвига (в том же направлении).

$$\gamma^p = \frac{2\Delta\sigma}{E} \left\{ \begin{array}{l} \left( 1 - \frac{h}{a} \right) \left[ 1 - \left( \frac{r}{a-h} \right)^{\beta+1} \right] + \frac{h}{a}, \quad r^2 \leq (a-h)^2 \\ \frac{h}{a} \left( \frac{a-r}{h} \right)^{\beta+1}, \quad (a-h)^2 \leq r^2 \leq a^2. \end{array} \right.$$

Результат вычислений при  $\beta = 1$  приведён на рис. 3.

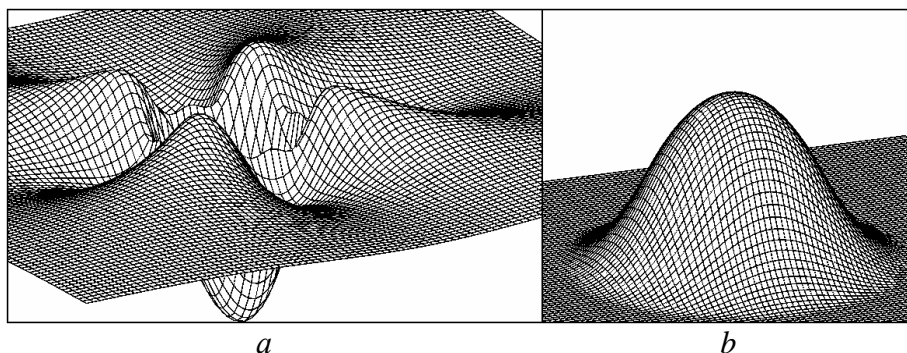


Рис. 3. Пример пространственного распределения напряжения  $\tau(x, y)$  (a) и пластической деформации чистого сдвига  $\gamma^p$  (b):  $\beta = 1, h = a/2$ .

Семейство ЭР, равномерно распределённых вдоль прямой линии, составляет полосу локализованной пластической деформации (ПЛД) шириной  $2a$ . Пример распределения напряжения  $\tau$  для полосы локализованного сдвига под углом  $45^\circ$  к оси растяжения приведён на рис. 4. Обращают на себя внимание следующие особенности ПЛД:

1. На концах полосы всегда наблюдается концентрация сдвигового напряжения. Это способствует увеличению длины полосы под действием внешнего напряжения.
2. Зона концентрации напряжения на конце полосы всегда сочетается с зоной антиконцентрации напряжений внутри полосы.
3. Концентрация напряжения увеличивается по мере увеличения длины полосы.

В работе [2] рассчитано поле внутренних напряжений в твёрдом теле с очагом однородной пластической деформации сдвига прямоугольной формы. Если длина равна ширине полосы, получается очаг пластической деформации сдвига квадратной формы. Распределение напряжения  $\tau$  для данного случая представлено на рис. 5. Видно, что по всем четырем направлениям под углом  $45^\circ$  к оси растяжения наблюдается повышенная

концентрация напряжения сдвига, охватывающая области, соизмеримые с размером самого квадрата.

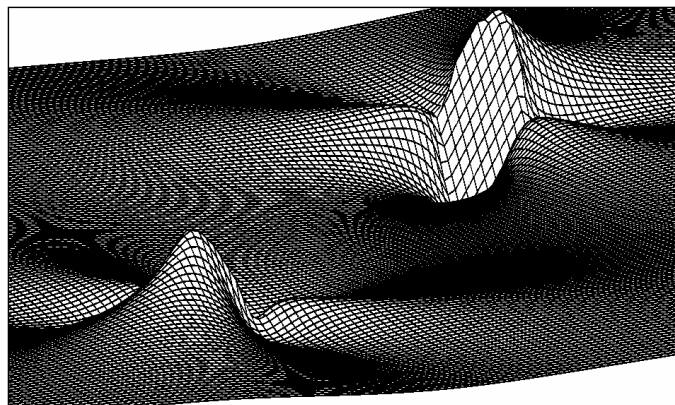


Рис. 4. Поле напряжения полосы пластической деформации чистого сдвига, сформированной под углом  $45^\circ$  к оси растяжения.

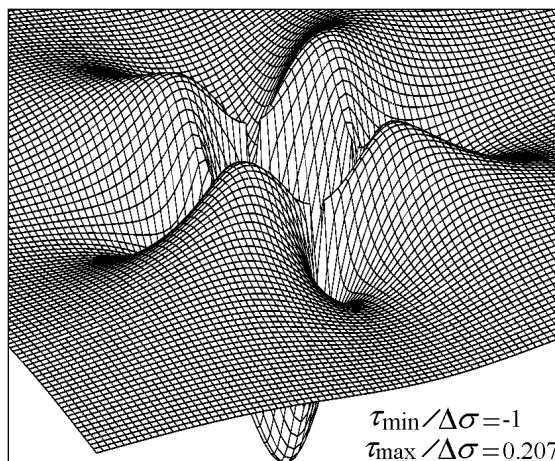


Рис. 5. Распределения напряжения сдвига под углом  $45^\circ$  к оси растяжения для ЭР в форме квадрата.

### 3. Моделирование эффектов прерывистой текучести в поликристаллах

При моделировании методом элементов релаксации моделируемую среду представляют в виде совокупности дискретных элементов, играющих роль элементов структуры. Каждый элемент моделируемой среды обладает способностью переключать свое состояние посредством дискретного скачка пластической деформации. Структурный элемент с полем пластической деформации сам по себе становится элементом релаксации. Он определяет соответствующее изменение поля внутренних напряжений в твердом теле. Таким образом, в основе моделирования методом элементов релаксации лежит взаимодействие полей внутренних напряжения от элементов структуры, испытавших пластическую деформацию.

Приведём пример моделирования эффектов прерывистой текучести в поликристаллических материалах при растяжении. Каждый акт вовлечения элемента в пластическую деформацию соответствует определенной релаксации напряжения  $\Delta\sigma$  в определённый промежуток времени промежутку  $dt$ , который задаётся из физических соображений. Приращение внешнего напряжения  $d\sigma$  за промежуток времени  $dt$  в работе [2] определяли по формуле

$$d\sigma = \frac{M(v_0 dt - Ka^2 \Delta\sigma / bE)}{(b + Ml_0 / (Eh))}, \quad (3)$$

где  $v_0$  – скорость движения пуансона машины,  $a$  – радиус кристаллита,  $S$ ,  $l_0$ ,  $h$  и  $b$  – сечение, длина, толщина и ширина рабочей части плоского образца соответственно,  $M$  – модуль

жёсткости машины,  $K$  – коэффициент,  $E$  – модуль Юнга. Считали, что вовлечение зерен в пластическую деформацию происходит последовательно. Вовлечение отдельного зерна в пластическую деформацию происходит, когда в центре его  $\tau = \tau \geq \tau_{cr}$ , т.е. превышает критическое напряжение сдвига. Параметр  $\Delta\sigma$  определяли величиной:  $\Delta\sigma = 2(\tau_{max} - \tau_0)$ , где  $\tau_{max}$  – максимальное напряжение сдвига в направлении под углом  $45^\circ$  к оси растяжения (согласно критерию Мизеса-Треска),  $\tau_0$  – напряжение пластического течения кристаллита, ниже которого пластическая деформация кристаллита не происходит. Диаграмму  $\sigma$ – $\varepsilon$  строили суммированием приращения  $d\sigma$ , используя полученное выражение (3).

Влияние жесткости машины растяжения на диаграммы нагружения поликристаллов с модулем Юнга  $E = 210000$  МПа иллюстрирует рисунок 6.

Кривая 1 для «мягкого» режима нагружения ( $M = 1.3 \times 10^2$  кН/мм) имеет ступенчатый характер. По мере увеличения жесткости машины  $M$  от  $1.3 \times 10^2$  до  $1.3 \times 10^8$  кН/мм кривая приобретает все пилообразный вид. Появляется и растет «зуб» текучести. Увеличивается амплитуда колебаний внешнего напряжения. На всех кривых наблюдается площадка текучести, за которой следует стадия деформационного упрочнения, обусловленная увеличением поля внутренних напряжений от элементов релаксации.

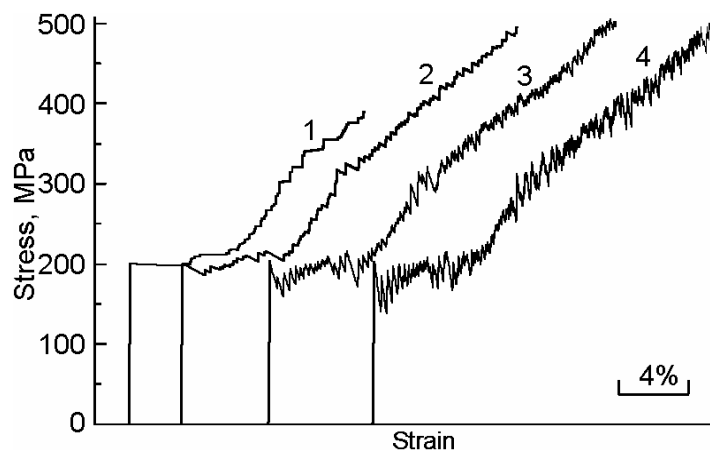


Рис. 6. Влияние модуля жесткости машины  $M$  на вид диаграмм нагружения:  $M$ , кН/мм =  $1.3 \times 10^2$  (1),  $1.3 \times 10^3$  (2),  $1.3 \times 10^5$  (3),  $1.3 \times 10^8$  (4).

Существенное влияние на кривые  $\sigma$ – $\varepsilon$  оказывает скорость нагружения. Чем меньше скорость нагружения, тем сильнее проявляется эффект прерывистой текучести (рис. 7). Увеличение скорости нагружения приводит к уменьшению амплитуды колебаний внешнего напряжения. Начиная с определенной скорости нагружения, на кривых полностью отсутствует осцилляция внешней нагрузки (кривая 5).

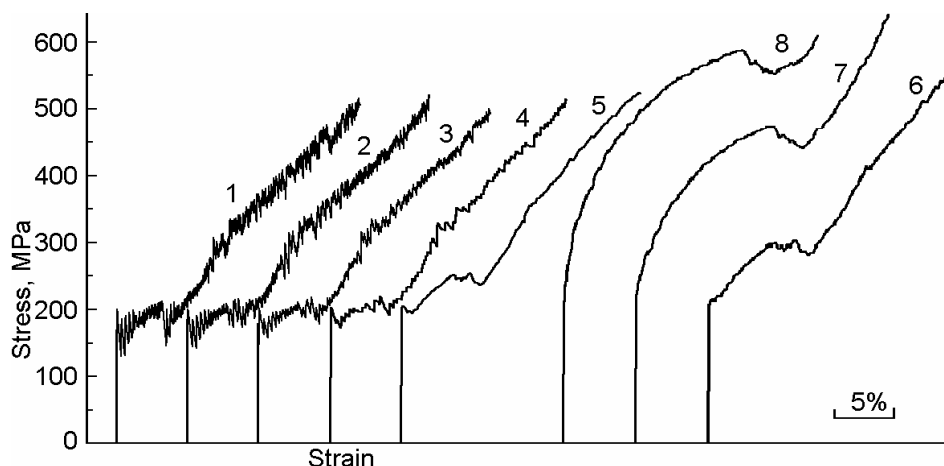


Рис. 7. Влияние скорости свободного движения захватов испытательной машины  $v_0$  на вид диаграмм нагружения:  $v_0, \times 10^3$  мм/с = 1 (1), 10 (2), 20 (3), 30 (4), 40 (5), 50 (6), 80 (7), 110 (8).

Дальнейшее увеличение скорости нагружения приводит к исчезновению «зуба», затем площадки текучести (кривые 6-8). Напряжение течения увеличивается и исчезает эффект резкого предела текучести.

Наряду с влиянием жесткости машины и скорости нагружения, определяющих граничные условия нагружения, была рассмотрена также и роль характеристики  $\tau_{cr}$  самого материала при неизменных прочих параметрах модели. На рис. 8 изображены кривые  $\sigma$ – $\varepsilon$  для разных значений  $\tau_{cr}$ . По мере увеличения  $\tau_{cr}$  появляется и усиливается эффект портевена ле Шателье. При этом увеличивается напряжение течения площадка текучести и амплитуда пиков на диаграммах нагружения.

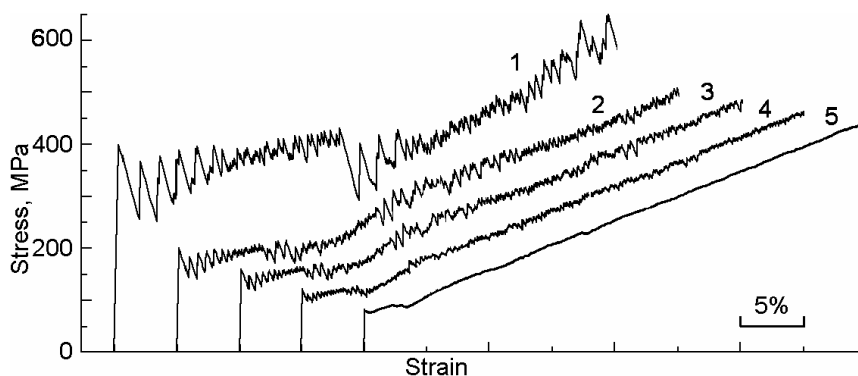


Рис. 8. Влияние напряжения  $\tau_{cr}$  на вид диаграмм нагружения:  $\tau_{cr} = 200(1), 100(2), 80(3), 60(4), 40(5)$ .

#### 4. Заключение

В данной работе раскрыты некоторые возможности нового метода – метода элементов релаксации. Показаны приемы расчета напряженно-деформированного состояния упругой плоскости с очагами пластической деформации различной геометрической формы и размеров. Приведены примеры построения очагов с градиентами пластической деформации. Получено оригинальное аналитическое решение для поля внутренних напряжений ПЛС прямоугольной формы, частным случаем которой является очаг однородной пластической деформации сдвига в форме квадрата.

Рассмотрены возможности моделирования данным методом эффектов локализации пластической деформации. Проведен анализ влияния жесткости испытательного устройства на эффекты прерывистой текучести.

Полученные результаты, свидетельствуют о больших предсказательных возможностях и перспективности развиваемого метода. Они хорошо согласуются с известными экспериментальными данными [3, 4].

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (РФФИ), проект № 10-08-01182.

#### Список литературы

1. Дерюгин Е.Е. Метод элементов релаксации. Монография. Новосибирск: Наука. Сибирское предприятие РАН, 1998.
2. Deryugin, Ye.Ye., Lasko, G., Schmauder, S. Relaxation Element Method In Mechanics of Deformed Solid. In: Wilhelm U. Oster *Computational Materials*. Hauppauge NY: Nova Science Publishers, Inc. 2009. P.479-545.
3. Toyooka S., Widiastuti R., Zhang Q., Kato H. Dynamic Observation of Localized Strain Pulsation Generated in the Plastic Deformation Process by Electronic Speckle Pattern Interferometry. *Jpn. J. Appl. Phys.* 2001. V.40. Part 2. No 2A. P.873-876
4. Zhang Q., Jiang Z., Jiang H., Chen Z., Wu X. On the propagation and pulsation of Portevin-Le Shatelier deformation bands: An experimental study with digital speckle pattern metrology. *Int. J. Plasticity*. Vol.21. 2005. P.2150-2173.