

Определение начальной формы волны цунами по данным о колебаниях уровня свободной поверхности

Т.А.Воронина

Институт Вычислительной Математики и Математической Геофизики СО РАН
e-mail: vta@omzg.sccc.ru

В работе рассматривается обратная задача математической физики для восстановления начальной формы волны цунами по измерениям колебаний уровня свободной поверхности, обусловленных прошедшей волной в серии удаленных приемников. Распространение волн описывается в рамках линейной теории мелкой воды. Аппроксимация задачи осуществляется на основе конечно-разностного подхода. Рассматриваемая задача относится к классу некорректных (условно-корректных) задач, для решения которой применяется техника g -решений. Регуляризация оператора в этом случае осуществляется путем сужения оператора на подпространство, натянутое на конечный набор первых сингулярных векторов. Строится обобщенное нормальное g -решение. Предложенная методика позволяет избежать неустойчивости численного решения рассматриваемой некорректной задачи. Эффективность предложенного подхода подтверждается путем численного моделирования для случая реальной батиметрии побережья Перу и синтетических мареограм. Установлено, что качество получаемого решения существенно зависит от пространственного распределения регистрирующей системы относительно предполагаемого очага цунами, особенностей рельефа дна и уровня шумов. Решение обратной задачи об источнике цунами в режиме реального времени позволит существенно уточнить прогноз этого разрушительного события для конкретных регионов.

Катастрофические цунами последнего десятилетия в Тихом и Индийском океанах с особой остротой поставили вопрос о прогнозировании столь разрушительного события, уменьшении цунамириска, разработке мер по смягчению последствий будущих ударов стихии. Однако следует сказать, что ложные цунамитревоги влекут колоссальные финансовые и психологические потери, поэтому целью предпринимаемых мер является повышение точности прогноза цунами. Наиболее частыми причинами образования цунами являются подводные землетрясения, оползни, очаги которых находятся далеко в океане, скрыты под толщей воды. Для количественной оценки цунамиопасности участков побережья существенными оказываются географическое положение исследуемого участка берега относительно цунамигенных зон, геометрические особенности рельефа дна на трассах прохождения волн цунами и характеристики самого очага, то есть форма начального возвышения в области очага цунами, где, как правило, отсутствуют прямые приборные наблюдения. Анализ только сейсмических данных не позволяет дать уверенный прогноз о последующем цунами.

В этих условиях математическое моделирование является почти единственным средством, позволяющим изучить закономерности процесса распространения цунами. Ключевым моментом численного моделирования цунами является конструирование источника, который генерирует критическую волну цунами для определенного пункта наблюдения. Этим объясняется увеличение интереса к обратной задаче цунами, которая заключается в восстановлении пространственно-временной области источника цунами по характе-

ристикам регистрируемых волн в пунктах наблюдения. Задача определения источника цунами по инструментальным записям на побережье ставится как обратная задача математической физики. Как известно, такие задачи относятся к классу некорректных или условно-корректных задач, что накладывает довольно жесткие ограничения на систему наблюдений и весь используемый математический аппарат. Применение математических методов для "обращения" мареографных записей началось с работ S.Satake (1987,1989), A.Piatanesi и др. (1996), A.Piatanesi, S.Tinti, G.Pagnoni (1996, 2001) и других. В большинстве работ использовались линейная теория распространения волн, численное построение функции Грина. Сопряженный метод, предложенный С.Pires и М.А.Miranda (2001), позволял использовать как линейную, так и нелинейную теории распространения волн.

В настоящей работе распространение волн также рассматривается в рамках линейной теории мелкой воды. Глубина океана считается функцией двух переменных. Задача восстановления источника не является, вообще говоря, однозначно разрешимой [1]. Единственность имеется тогда, когда функция, описывающая движение морского дна в очаге цунами, допускает факторизацию. В данной работе зависимость от времени функции, описывающей подвижку морского дна, определяется функцией Хевисайда. Возбуждение волны цунами будет предполагаться обусловленным резким поднятием и опусканием дна в начальный момент времени, до которого все находилось в состоянии покоя. При этом полагается, что поверхность воды повторяет форму подвижки морского дна в очаге цунами. Предполагается, что для всей области, от зоны генерации и вплоть до линии расположения мареографов для описания процесса распространения волн цунами может использоваться линейное приближение мелкой воды. В работе не исследовались вопросы набегания волны на берег, полагая, что на береговой линии выполняется условие абсолютно отражающей твердой стенки, состоящее в требовании обращения в ноль нормальной производной от функции, описывающей колебание свободной поверхности. Кривизной Земли пренебрегается, что характерно при изучении региональных цунами. Задача рассматривается в декартовой системе координат, где ось z имеет направление силы тяжести. Математическая постановка задачи в этих предположениях состоит в определении первоначального поднятия свободной поверхности $W(x, y, t)$, описываемого некоторой финитной функцией $\varphi(x, y)$ по колебанию уровня свободной поверхности, известному на некотором множестве точек $M : \{(x_i, y_i) \in G, i = 1, \dots, P\}$, расположенных вдоль линии $G : \{(x(s), y(s)), 0 \leq s \leq L\}$:

$$W(x, y, t) \Big|_G = W_0(x(s), y(s), t), (x(s), y(s)) \in G, 0 \leq t \leq T \quad (1)$$

Предполагается, что линия G - гладкая кривая без самопересечений. Функция $W(x, y, t)$ - есть функция колебания уровня свободной поверхности и решение следующей начально-краевой задачи:

$$W_{tt} = \operatorname{div} (gh(x, y) \operatorname{grad} W) \quad (2)$$

$$W|_{t=0} = \varphi(x, y); \quad W_{t=0} = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial n} \Big|_L = 0; \quad (3)$$

Здесь $h(x, y)$ - гладкая функция, описывающая рельеф дна, L - береговая линия. На так называемых "свободных" границах, которые возникают при искусственном ограничении моделируемой области, в данной работе реализованы абсолютно поглощающие краевые условия второго порядка точности. Сформулированная постановка (1-3) неявным образом вводит в рассмотрение так называемый оператор обратной задачи A , который переводит начальное поднятие $\varphi(x, y)$ в данные (1). Этот оператор действует следующим

образом: при фиксированном профиле дна для текущего начального поднятия нужно решить начально-краевую задачу (2-3) и взять след полученного решения на линии G , что можно записать в операторном виде как:

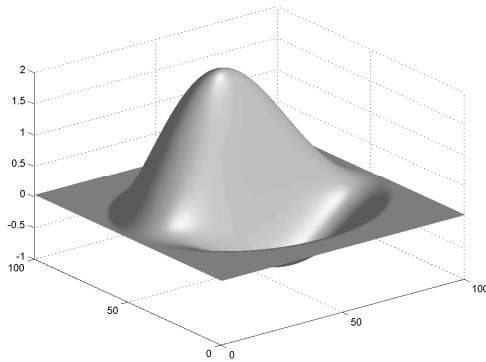
$$A < \varphi(x, y) > = W_0(s, t) \quad (4)$$

В работе [2] детально исследовались свойства этого оператора. При соответствующих предположениях относительно функций $\varphi(x, y)$ и $h(x, y)$ на основании теорем вложения доказывается, что оператор A является компактным линейным оператором, действующим из пространства $W_2^1(\mathcal{D})$ в пространство $L_2((−L, L) \times (0, T))$. Как известно, компактный оператор имеет матричное представление, то есть операторное уравнение первого рода (4) может быть сведено к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Для численного решения которой нужно перейти к ее конечномерной аппроксимации. Компактность исходного оператора обеспечивает стремление полученного таким образом решения к решению исходного операторного уравнения, если последнее существует. В то же время компактность исходного оператора означает, что с ростом параметров размерности подпространств - растет и число обусловленности получаемой матрицы и, следовательно, чувствительность получаемого решения к ошибкам. Один из способов разрешения возникающего противоречия состоит в построении так называемого r -решения [3]. Полученная система аппроксимируется явно-неявной конечно-разностной схемой на равномерной прямоугольной сетке, построенной на четырехточечном шаблоне и имеющей второй порядок аппроксимации по пространству и первый по времени [4]. Для полученной при этом матрицы выполняется SVD-анализ и строится обобщенное нормальное r -решение, которое и является восстановленной приближенно первоначально формой волны цунами.

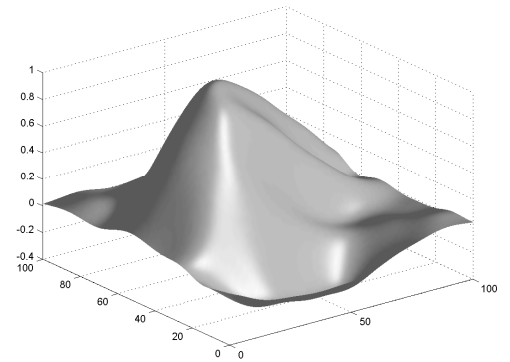
$$\varphi^{[r]}(x, y) = \sum_{j=1}^r \frac{(W_0, \bar{u}_j)}{s_j} \bar{v}_j(x, y). \quad (5)$$

Здесь s_j, v_j, u_j - сингулярные числа, правые и левые сингулярные векторы матрицы A . Регуляризация оператора в этом случае осуществляется путем сужения оператора на подпространство, натянутое на конечный набор первых правых сингулярных векторов. В рассматриваемой задаче сингулярные числа оператора быстро убывают с ростом их номеров, это и означает некорректность данной задачи. Число r выбирается из условия $r = \max\{k : \frac{s_k}{s_1} \geq \frac{1}{\text{cond}}\}$. Меняя величину r можно контролировать погрешность решения. Предлагаемый подход, при котором решение строится на основе анализа свойств оператора, определяемых выбранной системой наблюдения и реальной батиметрией, позволяет получить максимально надёжный результат восстановления для заданных условий. На сегодняшний день этот подход дает наиболее реалистическую и обоснованную оценку эффективности выбранной системы наблюдений. Вычисляется относительная погрешность восстановления по норме в L_2 . При обработке реальных мареографных наблюдений возникает общая для обратных задач сейсмологии проблема - используемые математические методы требуют «не зашумленных» данных и характеризуются низкой численной устойчивостью. Фильтрация шумов на основе метода разбиения единицы дает возможность работать с реальными данными [5]. В данной работе исследовалась возможность восстановления функции источника цунами типа пологого надвига с падением под островную дугу. На рассчитанные от модельного источника мареограммы накладывался "ветровой" шум - высокочастотная помеха. Все представленные эксперименты проводились с относительной погрешностью 3% по отношению к максимальной из зарегистрированных амплитуд.

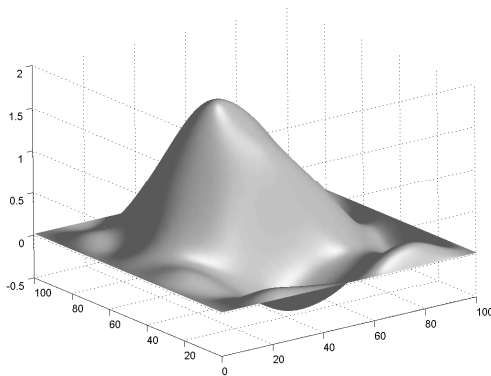
Затем производилась фильтрация как мареограм так и восстановленного по некоторой части этих синтетических мареограм источника цунами. От полученного таким образом источника цунами моделировалось распространение волны и фиксировались записи теперь уже во всех точках регистрирующей системы. В результате получено совпадение не только в участвовавших в восстановлении приемниках, но и в остальных. На Рисунке 1. представлены результаты восстановления по 3-м, 5-и, 7-и приемникам из 14. В скобках указаны экстремальные значения функции $\varphi(x, y)$ после фильтрации и номера приемников (нумерация приемников на Рисунке 3). На Рисунке 2. представлены мареограммы, записанные от модельного, восстановленного по 5-и и по 7-и приемникам соответственно. Результаты проведенных численных экспериментов для реальной батиметрии побережья Перу и зашумленных синтетических данных свидетельствуют об адекватности предложенного подхода к решению обратной задачи цунами, что позволяет оценивать возможности используемой системы регистрации приходящих волн при прогнозировании цунамииска для конкретного участка побережья.



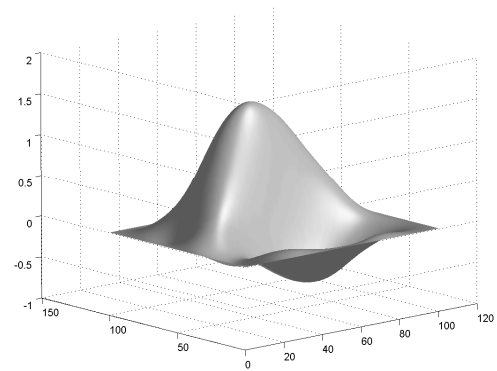
a)



b)



c)



d)

Рис. 1. а)исходный источник $\varphi_{\max} = 1.959m$; $\varphi_{\min} = -0.67m$.;б)восстановленный по 3-м мареограммам (2,11,13): $\varphi_{\max} = 1,213(0.885)m$; $\varphi_{\min} = -0.738(-0.357)m$; $r = 41$; $err. = 0,717$; с)восстановленный по 5-и мареограммам(3,4,6,7,10) $\varphi_{\max} = 1,757(1,4716)m$; $\varphi_{\min} = -1,0073(-.5142)m$; $r = 57$; $err. = 0,4729$; d)восстановленны по 7-и (5,6,7,8,9,10,11) $\varphi_{\max} = 1,835(1.5138)m$; $\varphi_{\min} = -0,7016(-0,5484)m$; $err = 0,262$; $r = 103$; $\log(1/cond) = 6$.

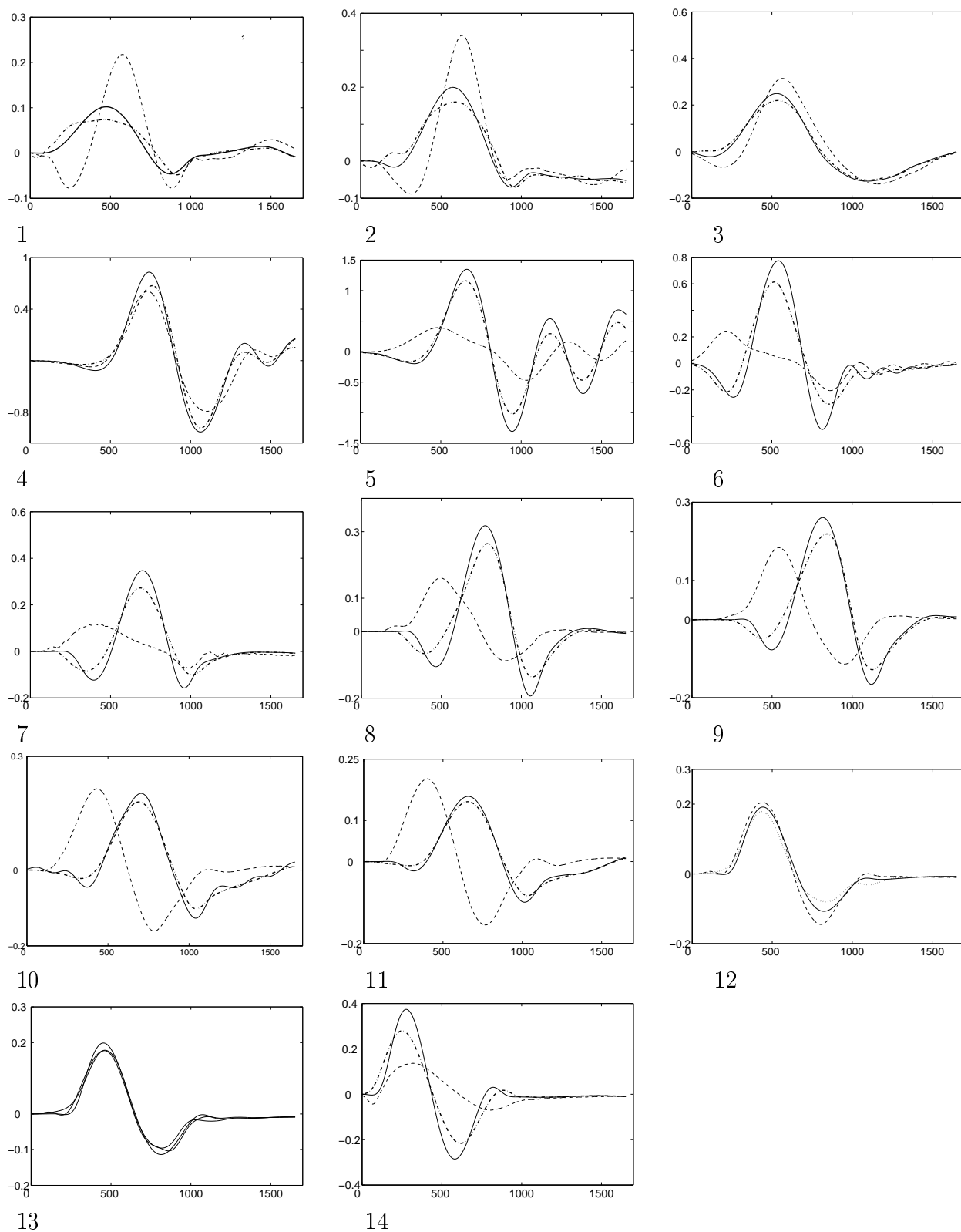


Рис. 2. Синтетические мареограммы, записанные в 14 пунктах наблюдения. Сплошная линия - от исходного источника; — от восстановленного источника по записям в 5-и пунктах (3,4,6,7,10); -.-. от восстановленного источника по записям в 7-и пунктах (5,6,7,8,9,10,11).

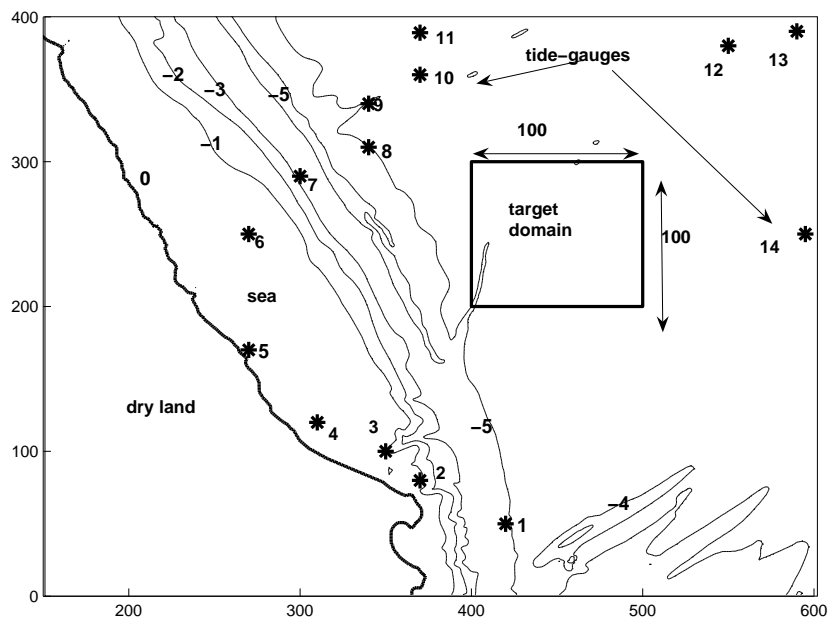


Рис. 3. Линии уровня прибрежной зоны Перу с предполагаемой областью поиска источника (target domain) и 14 пунктов регистрации приходящих волн (*). Все размеры указаны в километрах.

Список литературы

- [1] Кайстренко В.М. Обратная задача на определение источника цунами. // Сб.: Волны цунами. Труды САХКНИИ. 1972. Вып. 29. С. 82-92.
- [2] Воронина Т.А. Определение пространственного распределения источников колебаний по дистанционным измерениям в конечном числе точек // СибЖВМ. 2004.-Т.7, № 3. С. 203-211.
- [3] Cheverda V.A., Kostin V.I. r -pseudoinverse for compact operators in Hilbert space: existence and stability // *J. Inverse and Ill-Posed Problems*, 1995, V.3(2), P.131-148.
- [4] Марчук Ан.Г., Чубаров Л.Б., Шокин Ю.И. Численное моделирование волн цунами. Новосибирск: Наука, 1983. 176 с.
- [5] Белоносов А.С., Цецохо В. А. Вычислительный алгоритм и процедуры сглаживания функций, заданных в узлах нерегулярной сетки на плоскости // Некоторые проблемы математической физики и проблемы интерпретации геофизических наблюдений. СССР Сиб.отд-ие. Вычисл. центр. 1976, С.6-29.