

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ В ТЕЧЕНИИ БЛАЗИУСА КОНЕЧНОМЕРНОЙ ПРОЕКЦИЕЙ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

Т.Г.Дармаев

Бурятский государственный университет, Улан-Удэ

e-mail: dtg@bsu.ru

The method of invariant finite-dimensional projections of the Navier-Stokes equations developed by B.J.Skobelev is applied to a plane-parallel flow of a viscous incompressible liquid over a flat semi-infinite plate. Thus the initial-boundary problem for disturbances of main flow is reduced to finite-dimensional system of the ordinary differential equations which right parts are calculated from recurrent system of linear boundary problems. The received calculations show that in Blasius flow exists tangential bifurcation of periodic modes. Comparison of numerical results with experimental data is spent.

Введение

Для исследования возмущений в области ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое используются в основном слабонелинейная теория гидродинамической устойчивости [1-4] и прямое численное интегрирование уравнений Навье-Стокса. Они хорошо описывают начальную стадию этого процесса, но не гарантируют правильного описания асимптотического поведения решения и не объясняют причину появления стохастичности.

В данной работе метод инвариантной конечномерной проекции уравнений Навье-Стокса разработанный Б.Ю.Скобелевым [5] применяется для плоскопараллельного течения вязкой несжимаемой жидкости над плоской полубесконечной пластиной. При этом начально-краевая задача для возмущений основного течения сводится к конечномерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, правые части которых находятся из рекуррентной системы линейных краевых задач [6]. Полученные расчеты показывают, что в пограничном слое существует тангенциальная бифуркация периодических режимов. Из теории динамических систем известно [7], что в окрестности точек тангенциальной бифуркации возникает явление перемежаемости, т.е. смена во времени регулярного и стохастического поведения системы.

Метод инвариантной проекции

В соответствии с методом инвариантной конечномерной проекции уравнений Навье-Стокса решение для возмущений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \nabla) u + Lu = 0, \quad \text{div } u = 0 \quad (1)$$

$$Lu = (v_0 \nabla) + (u \nabla) v_0 - \nabla p - \frac{1}{\text{Re}} \Delta u,$$

ищется в виде: $u = u_{2n} + u_{\perp}$, u_{2n} – линейная функция m собственных функций оператора L , а ортогональное дополнение u_{\perp} ищется в виде функции от u_{2n} : $u_{\perp} = g(u_{2n})$, где v_0 – невозмущенное решение, p – давление, Re – число Рейнольдса. Условие того, что решение принадлежит инвариантному многообразию уравнений Навье-Стокса, однозначно определяет вид функции $g(u_{2n})$.

Выберем систему координат так, чтобы ось x была направлена вдоль пластины, z -координата – поперек пластины, y -координата направлена перпендикулярно пластине, начало координат совпадает с передней кромкой пластины. Рассмотрим трехмерные моногармонические возмущения, периодические по продольной координате x с волновым числом α и по поперечной координате z с волновым числом β :

$$u_j^{km} = \hat{u}_j^{km}(y) e^{i\theta_{km}}, \quad j = 1, 2, 3; \quad -\infty < k, m < \infty, \quad \theta_{km} = k\alpha x + m\beta z.$$

Уравнение неразрывности системы (1) удовлетворяется введением функций тока:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi^{km}}{\partial y} = k\alpha u_1^{km} + m\beta u_3^{km} + \delta_{\lambda 0}(u_1^{00} + Cu_3^{00}) \\ (1 - \delta_{\lambda 0}) \frac{\partial \psi^{km}}{\partial \theta} = -u_2^{km} \end{cases}$$

где δ - символ Кронекера, C – произвольная постоянная.

Из уравнения неразрывности и уравнений Навье-Стокса для завихренности $\bar{\omega}$ в [6] выводится система эволюционных уравнений для векторов $\bar{x}^{km} = (\bar{\Delta} \bar{\psi}^{km}, \bar{\omega}_2^{km}, \delta_{\lambda 0} u_3^{00})$:

$$\frac{dx}{dt} = -L_v x + N(x), \text{ где } x = \bar{x}^{km}(y) e^{i\theta_{km}}, -\infty < k, m < \infty$$

В соответствии с теорией [5] динамическая система:

$$\frac{d\rho_k}{dt} = (\sigma_r^{(k)} + b^{(k)})\rho_k, \quad \frac{d\theta_k}{dt} = (\sigma_i^{(k)} + c^{(k)})\rho_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \text{ определяет поведение траекторий на}$$

$2k$ -мерном инвариантном многообразии, где $\sigma^{(k)} = \sigma_r^{(k)} + i\sigma_i^{(k)}$ – собственные значения оператора $(-L_v)$, а $b^{(k)}, c^{(k)}$ – некоторые функции, зависящие от полярных координат ρ_k, θ_k . В случае двумерной инвариантной проекции предельное многообразие определяется функциями:

$$g^* = \sum_{|s|=2}^{\infty} g_s \rho^s, \quad b(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \rho^{2n}, \quad c(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n} \rho^{2n}, \quad g_s = \sum_{k=-s}^s g_{sk} e^{ik\theta^*}, \quad \theta^* = \theta - \alpha x,$$

где g_{sk} удовлетворяют следующей рекуррентной системе уравнений:

$$\begin{aligned} ik\alpha \left[(\sigma_r - U)\Delta_k + D^2 U \right] g_{sk} - \frac{1}{R} (\Delta_k)^2 g_{sk} = -\delta_{k1} (b_{s-1} + ic_{s-1}) \Delta_1 f - \delta_{k,-1} * \\ * (b_{s-1} - ic_{s-1}) \Delta_1 \bar{f} - ik \sum_{q+p=s} c_q \Delta_k g_{pk} - i\alpha \sum_{q+p=s} \sum_{l+j=k} \left[l g_{ql} D \Delta_j g_{pj} - j D g_{ql} \Delta_l g_{pj} \right], \end{aligned} \quad (2)$$

где $\tilde{\alpha}^2 = \alpha^2 + \beta^2, D = \frac{d}{dy}, \Delta_k = D^2 - (k\tilde{\alpha})^2, U(y)$ – профиль невозмущенного ламинарного потока, \bar{f} – сопряженная собственная функция задачи Орра-Зоммерфельда.

Коэффициенты b_{s-1}, c_{s-1} для 2π -периодических функций от θ определялись из условий ортогональности и нормировки. Амплитуда периодических режимов определялась из уравнения:

$$\gamma + \sum_{n=1}^N b_{2n} A^{2n} = 0, \quad N \rightarrow \infty. \quad (3)$$

где $\gamma = \alpha\sigma_i$, – линейный коэффициент нарастания.

Результаты расчетов

При численном интегрировании к системе (2) добавляются граничные условия прилипания и условия затухания возмущений на бесконечности, которые заменяются условиями на интервале $(0, L)$, где $L \gg 1$. Вычисление присутствующих в правой части собственных функций задачи Орра-Зоммерфельда, а также решение системы (1) проводилось методом ортогональной прогонки [8].

В работе проводился численный расчет приближенных уравнений для амплитуд периодических режимов (3) при $N = 2, 3, 4, 5$. Результаты отражены на рис.1-3.

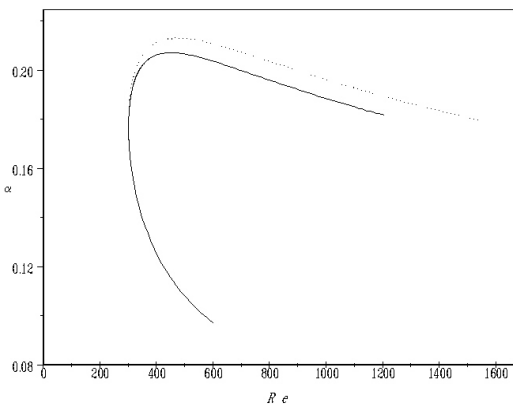


Рис.1 Нейтральные кривые

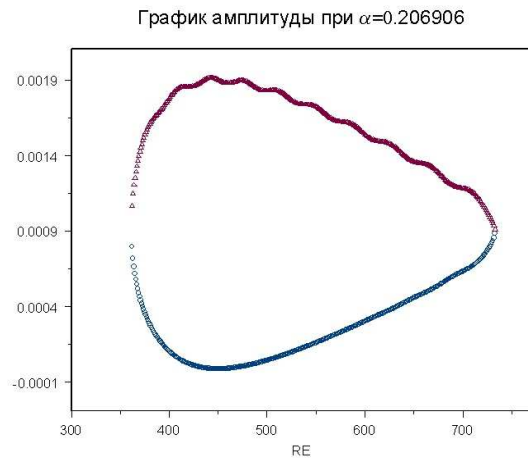


Рис.2 Срез амплитудной поверхности

При малых значениях волнового числа α от нижней ветви линейной нейтральной кривой ответвляется устойчивый периодический режим. С увеличением числа Рейнольдса амплитуда этого режима нарастает, затем уменьшается и далее этот режим исчезает в результате слияния с неустойчивым режимом, ответвляющимся от верхней ветви линейной нейтральной кривой. Точка слияния этих режимов называется точкой тангенциальной бифуркации [9], соответствующая точке складки в теории катастроф [10]. На рис.1 приведены сплошной линией - линейная нейтральная кривая и точки складок, или, что то же самое, точки тангенциальной бифуркации трехмерных режимов. Из рис.2 видно, что при увеличении α передняя складка амплитудной поверхности из нефизической области отрицательных значений квадратов амплитуд выходит в область положительных значений и при этом происходит смена закритической бифуркации докритической. При дальнейшем увеличении α амплитудная поверхность периодических решений отрывается от линейной нейтральной кривой, и при некотором значении периодические решения исчезают.

В настоящее время экспериментально обнаружены три типа перехода. Первый был обнаружен в классической работе Клебанова и др. [11]. Он характеризуется быстрым нарастанием возмущений, высокочастотными всплесками и последующим образованием турбулентных пятен. Другой тип перехода был обнаружен в экспериментах Качанова, Козлова, Левченко [12]. Он характерен нарастанием высших гармоник двумерной волны Толлмина-Шлихтинга с последующим ростом трехмерной субгармоники. В экспериментах Козлова, Левченко, Сарика [13] наблюдался третий тип перехода - промежуточный между первыми двумя типами.

Как известно, в экспериментах по генерации ламинарно-турбулентного перехода с помощью вибрирующей ленточки клебановский тип перехода наблюдается только при относительно больших начальных амплитудах возмущения и характеризуется резким ростом возмущений. Таким образом клебановский тип перехода можно связать с передней верхней частью амплитудной поверхности, причем амплитуда соответствующего возмущения должна быть не меньше амплитуды периодического решения в передней точке тангенциальной бифуркации.

Если начальная амплитуда меньше критической клебановской, то возможен другой тип перехода, который можно соотнести с промежуточным типом, наблюдавшимся в эксперименте. Этот тип перехода связан с тем, что в результате нарастания возмущения становятся трехмерными и внутри нелинейной нейтральной поверхности для плоских возмущений их амплитуда может стать равной амплитуде точки тангенциальной бифуркации для трехмерных возмущений ($\beta \neq 0$).

И, наконец, при субгармоническом типе перехода в эксперименте наблюдается рост высших гармоник начальной двумерной волны Толлмина-Шлихтинга. Причем начальные амплитуды возмущений, вызывающих этот тип перехода, достаточно малы, и начальные возмущения действительно являются двумерными. Поэтому естественно связать субгармонический тип перехода с задней точкой тангенциальной бифуркации в

окрестности верхней ветви линейной нейтральной кривой (см рис.2).

Таким образом, каждому типу перехода соответствует точка тангенциальной бифуркации периодических режимов (трехмерные или двумерные). Из теории динамических систем [13] следует, что в окрестности точки тангенциальной бифуркации возникает явление перемежаемости (т.е. чередование во времени ламинарного и турбулентного режимов). Причем длительность турбулентных режимов зависит от "расстояния" до точки тангенциальной бифуркации. Наблюдающаяся в экспериментах картина дает качественное подтверждение высказанным предположениям. Это следует, во-первых, из рис.1, где нанесены экспериментальные числа Рейнольдса перехода для вышеуказанных трех типов возникновения турбулентности. Во-вторых, появление и исчезновение высокочастотных пульсаций и турбулентных пятен подтверждает наличие явления перемежаемости.

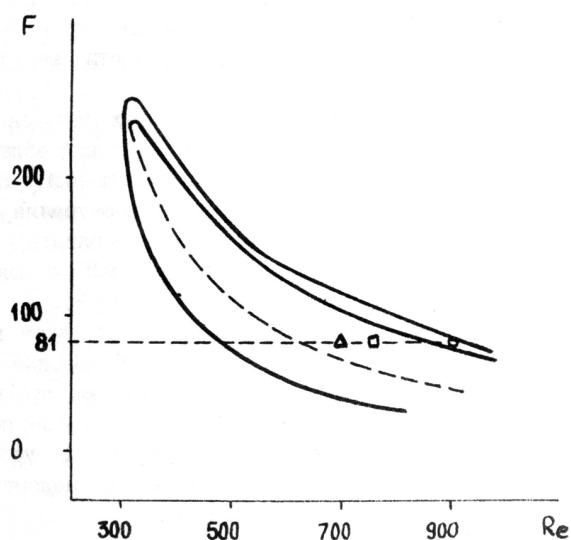


Рис.3 Сравнение с экспериментами (Δ – клебановский тип, \square - промежуточный, \circ – субгармонический)

Список литературы

1. Stuart J.T. On the non-linear mechanics of wave disturbances stable and unstable parallel flows. Pt.1 // J.Fluid Mech. 1960.-V .9, N 3.-P .353-370.
2. Watson J. On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows. Pt.2 // J.Fluid Mech.-1960.-V .9, N 3.-P .371-383.
3. Craik A.D. Non-linear resonant instability in boundary layers // J. Fluid Mech.-1971. - V -50, P t.2. -P. - 393-413.
4. Herbert Th. Subharmonic three-dimensional disturbances in unstable plane shear flows // AIAA Paper 83 -1759, 1983.
5. Скобелев Б.Ю. Конечномерная инвариантная аппроксимация уравнений Навье-Стокса и автоколебательные режимы течения Пуазейля // ПММ.-1990-Т.54. № 3.-С.416-429.
6. Дармаев Т.Г. Конечномерная инвариантная аппроксимация и периодические режимы течения Блазиуса // Вычислительные технологии. 2008. Т.13, № 4. С.60-70.
7. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. -М.: Наука, 1987.
8. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН. 1961. Вып.3(99). С.171-174.
9. Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций/ Пер.с англ.-М.: Мир, 1983.-301с.
10. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения / Пер.с англ. М.: Мир, 1980.-607 с.
11. Klebanoff P.S., Tidstrom K.D., Sargent L.M. The three-dimensional nature of boundary-layer instability // J. Fluid Mech.-1962.- V .12.-P t.1.-P .1-34.
12. Качанов Ю.С., Козлов В.В., Левченко В.Я. Нелинейное развитие волны в

пограничном слое // МЖГ.-1977.-№ 3-С.49-53.

13. Козлов В.В., Левченко В.Я., Сарик В.С.(США) Образование трехмерных структур при переходе в пограничном слое. -Новосибирск, 1983.-(Препр./ АН СССР. Сиб. отделение. ИТПМ; № 10-83).