ОБ ОЦЕНКАХ ВЕРОЯТНОСТИ ВЫРОЖДЕНИЯ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫМИ БЛУЖДАНИЯМИ

Рапопорт Э.О.

ИМ СО РАН,

Новосибирский государственный университет

Новосибирск, Россия

rapoport@math.nsc.ru

Имеется два продукта и два способа производства этих продуктов. Состояние системы отождествляется с целочисленными точками неотрицательного квадранта плоскости N_+^2. В каждый дискретный момент времени инвестор должен вкладывать неделимый единичный ресурс в одно из двух производств. Опишем процесс функционирования такого вложения.

Пусть задан набор целочисленных векторов (a_i, b_i), $1 \leq i \leq k$. При вложении в первое производство система переходит из точки (x, y) в одну из точек $(x + a_i, y + b_i)$ с вероятностями p_i, при вложении во второе производство – с вероятностями q_i. Некоторые из вероятностей могут быть равны нулю, $\sum_i p_i = \sum_i q_i = 1$. Через ξ будем обозначать двумерную случайную величину, определяемую набором вероятностей $\{p_i\}$, а через η – двумерную случайную величину, определяемую набором вероятностей $\{q_i\}$.

Под вырождением системы мы будем понимать выход ее из первого квадранта.

Управление системой – выбор в каждый момент времени вложения в первое или второе производство, т.е. выбор одной из двух случайных величин ξ или η, определяющих следующее состояние системы. Цель управления – минимизация вероятности вырождения системы, т.е. минимизация вероятности выхода из первого квадранта.

Естественно потребовать, чтобы первое управление (вложение ресурса в первое производство) было "лучше"для первого продукта, а второе управление – "лучше"для второго продукта. Формально это предположение будем записывать так:

$$\begin{array}{lll} \sum_i p_i b_i < 0, & \sum_i p_i(a_i + b_i) > 0, \\ \sum_i q_i a_i < 0, & \sum_i q_i(a_i + b_i) > 0. \end{array} \qquad (1)$$

Теорема 1. Существует такое управление, при котором достигает минимума вероятность вырождения.

Такое управление будем называть оптимальным.

Пусть $g(x, y)$ - вероятность вырождения при оптимальном управлении. Отметим, что $g(x, y)$ является решением системы

$$g(x, y) = \min(\sum_i p_i g(x+a_i, y+b_i), \sum_i q_i g(x+a_i, y+b_i)),$$

с граничными условиями $g(x, y) = 1$, если $(x, y) \notin N_+^2$.

Для получения оценок вероятности вырождения полезно рассмотрение системы уравнений, которую здесь запишем в следующем виде виде

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \sum\limits_i p_i e^{-(\alpha a_i + \beta b_i)} & = & 1 \\ \sum\limits_i q_i e^{-(\alpha a_i + \beta b_i)} & = & 1. \end{array} \right. \qquad (2)$$

Эту систему будем называть системой, ассоциированной с рассматриваемой марковской цепью, или просто ассоциированной системой. Очевидно, что пара $(0, 0)$ является решением этой системы.

Будем предполагать, что **ассоциированная система имеет только одно положительное решение**.

Можно показать, что эта система имеет лишь конечное число решений.

Случай наличия нескольких решений бып изучен автором ранее.

Пусть (α, β) – решение ассоциированной системы, отличное от (0,0). Справедлива следующая нижняя оценка для функции $g($ - вероятности того, что s становится отрицательной существует такая постоянная c_1, что

$$c_1 e^{-(\alpha x + \beta y)} \leq g(x, y).$$

При дополнительном предположении

Условие A: $p_i = 0$ при $b_i > 0$ и $q_i = 0$ при $a_i > 0$,

получена аналогичная верхняя оценка: существует константа c_2 такая, что

$$g(x, y) \leq c_2 e^{-(\alpha x + \beta y)}$$

Для некоторых частных случаев удалось получить точное значение этой вероятности .

О ЦЕНАХ

Пусть (p_1, p_2) - цены на производимые продукты.

Если задать нормировку

$\|(p_1, p_2)\| = \sqrt{|p_1|^2 + |p_2|^2}$,

то цены можно задавать в виде пары $(\cos\varphi, \sin\varphi)$.

Стоимость s произведенного набора

$$s = x\cos\varphi + y\sin\varphi, s \geq 0$$

.

Пусть $g(\varphi)$ – вероятность попадания s на отрицательную ось (вырождение).

Можно рассмотреть **задачу 2**:

при фиксированных ценах (определяемых параметром φ) найти управление, при котором для каждого $s \in S_z$ вероятность вырождения минимальна.

Управление, являющуеся решением **задачи 2**, естественно называть оптимальным управлением.

Теорема 2. Оптимальное управление существует.

Условие B: цены должны быть такими, чтобы управление, являющееся оптимальным для **задачи 1**, являлась оптимальным и для **задачи 2**.

Набор цен, при котором существует оптимальная политика, не приводящая к автоматическому вырождению исходной задачи, будем называть согласованными ценами.

Можно доказать, что для таких цен справедливы формулы

$$\cos\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \ \sin\varphi = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$

$$\lambda_p = \lambda_q = \sqrt{\alpha^2+\beta^2},$$

где пара (α, β) – решение ассоциированной системы.

$\mathbf{c}$-пожарное управление

Р.Раднером и М.Ротшильдом было введено понятие пожарного управления:

Управление γ будем называть пожарным, если в каждой целочисленной точке (x, y) первого квадранта

$\gamma(x, y) = 1$, если $x \geq y$,

$\gamma(x, y) = 0$, если $x < y$.

Это понятие легко обобщается на любой положительный вектор $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$

Управление γ будем называть $\mathbf{c}$-пожарным, если в каждой целочисленной точке (x, y) первого квадранта

$\gamma(x, y) = 1$, если $\frac{x}{c_1} \geq \frac{y}{c_2}$,

$\gamma(x, y) = 0$, если $\frac{x}{c_1} < \frac{y}{c_2}$.

Отметим, что для минимизации асимптотического поведения этой вероятности следует выбирать угол φ (и связанное с этим углом **c**-пожарное управление) так, чтобы максимизировать выражение $\alpha \cos\varphi + \beta \sin\varphi$.

Поэтому

$$\cos\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \ \sin\varphi = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

Таким образом, согласованные цены $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ и порождают оптимальное **c**-пожарное управление.

Общую оценку сверху (кроме единицы) получить невозможно. Но можно описать множество K точек, достаточно удаленных от осей координат, для которых такую оценку можно получить.

$$K_r = \{(x, y) : \frac{1}{r}x \leq y \leq rx\},$$

$$H = \{(x, y) : x \geq \max(|a_i|+1), y \geq \max(|b_i|+1)\},$$

$$K = H \cap K_r.$$

Теорема 5. Существует такая постоянная L, что для $(x, y) \in K$ справедлива оценка

$$g(x, y)_{\leq} L e^{-(\alpha x + \beta y)}$$

Множество K связано с пожарным управлением. Используя **c**-пожарное управление, константу L можно улучшить.