Об одном алгоритме решения плохообусловленной переопределенной системы линейных уравнений

Чубатов Андрей Алексеевич
Армавирская государственная педагогическая академия (Армавир), Россия
e-mail: `chaa@inbox.ru`

Аннотация

Рассмотрим приближенную плохообусловленную переопределенную СЛАУ

$$A \cdot x = b, ||A - \bar{A}|| \leq \Delta A, ||b - \bar{b}|| \leq \Delta b, \quad (1)$$

где A, b — приближенные и $\bar{A}$, $\bar{b}$ — точные данные, ΔA, Δb — погрешности матрицы и правой части.

Решение системы (1) будем искать в обобщенном смысле: в виде псевдорешения — решения нормальной системы

$$A^T \cdot A \cdot \tilde{x} = A^T \cdot b.$$

Будем одновременно искать псевдорешение $\tilde{x}$ и невязку $r = b - A \cdot \tilde{x}$ системы (1). Для этого сформируем расширенную нормальную систему (РНС) [1]

$$R \cdot z = d, \quad (2)$$

где $R = \begin{pmatrix} E & A \\ A^T & O \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} r \\ \tilde{x} \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$, E и O — единичная и нулевая матрицы.

Плохая обусловленность матрицы A приводит к некорректности задач (1) и (2): при $\Delta A \neq 0$ псевдорешение неустойчиво относительно погрешностей ΔA, Δb начальных данных. Для достижения устойчивости, необходим регуляризирующий алгоритм. Применив метод регуляризации А. Н. Тихонова [2], получим регуляризированную РНС (РегРНС)

$$T_\alpha \cdot z_\alpha = R \cdot d, \quad T_\alpha = \left(R^2 + \alpha \cdot E\right), \quad (3)$$

где z_α — регуляризированное решение РНС.

Существует два пути выбора регуляризирующего параметра α: априорный и апостериорный. В. А. Морозовым доказано, что если регуляризируемая система совместна и $\alpha = \Delta A$, то $||x_\alpha - \tilde{x}|| = O(\Delta A + \Delta b)$, т.е. регуляризированное решение x_α устойчиво (ассимптотически сходится к псевдорешению $\tilde{x}$). Вне зависимости от совместности системы (1), система (2) является совместной. Это позволяет априорно выбирать регуляризирующий параметр для РегРНС $\alpha_{apriory} = \Delta R = \sqrt{2} \cdot \Delta A$.

Список литературы

[1] Bjoork A. Numerical stability of methods for solving augmented systems // Contemporary Math, 1997, Vol. 204. Pp. 51–60.

[2] Морозов В.А. Алгоритмические основы методов решения некорректных задач // Вычисл. методы и программирование, 2003, Т. 45, с. 130–141.