ОЦЕНИВАНИЕ МНОЖЕСТВ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Людвин Д.Ю.

Институт вычислительных технологий СО РАН

г. Новосибирск

Постановка задачи

Рассмотрим систему полиномиальных уравнений

$$F(X) = 0, \qquad (\star)$$

где $F(X)$ — вектор полиномов

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k_1=0}^{K_1} \sum_{k_2=0}^{K_2} \ldots \sum_{k_n=0}^{K_n} a_{(i)k_1 k_2 \ldots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}.$$

Обозначим через $P = (p_j)$ вектор коэффициентов полиномов f_i. Рассматривая $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ как функцию $\varphi_i(X, P)$, зависящую от переменной $X = (x_i)$ и параметра $P = (p_j)$, принимающего значения из заданного бруса $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_j)$, запишем систему $(\star)$ в виде

$$\Phi(X, P) = 0 \qquad \text{или} \qquad \varphi_i(X, P) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Возьмем интервальное расширение функции $G(X,P)$ на брусе $\boldsymbol{P}$, получим системy интервальных полиномиальных уравнений

$$\boldsymbol{\Phi}(X,\boldsymbol{P}) = 0 \qquad \text{или} \qquad \boldsymbol{\varphi}_i(X,\boldsymbol{P}) = 0, \qquad i = 1,\ldots,n.$$

Под интервальным полиномом $\boldsymbol{\varphi}_i(X,\boldsymbol{P})$ будем понимать множество вещественных полиномов $\varphi_i(X,P)$ с коэффициентами $P \in \boldsymbol{P}$.

Множество решений интервальной системы $\boldsymbol{\Phi}(X,\boldsymbol{P}) = 0$ определим как

$$\Xi(\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{P}) = \{X \in \mathbb{R}^n | (\exists P \in \boldsymbol{P})(\Phi(X,P) = 0)\}.$$

В работе рассматриваются задачи:

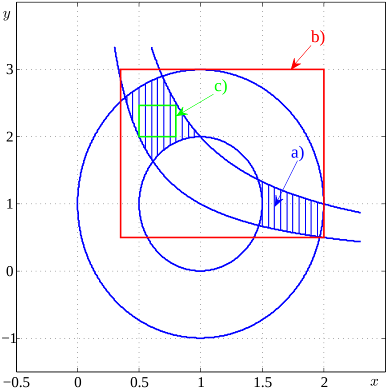
- внешнего оценивания множества решений, т.е. нахождения наименьшего бруса $\boldsymbol{V} \supseteq \Xi(\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{P})$,
- внутреннего оценивания множества решений, т.е. нахождения наибольшего бруса $\boldsymbol{U} \subseteq \Xi(\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{P})$.

Пример 1

Рассмотрим интервальную систему уравнений

$$\begin{cases} 4x^2 - 8x + y^2 + \boldsymbol{p}_1 = 0, \\ xy + \boldsymbol{p}_2 = 0, \end{cases}$$

где $\boldsymbol{p}_1 = [1, 4]$, $\boldsymbol{p}_2 = [-2, -1]$. На рисунке изображены: (a) — множество решений системы уравнений, (b) — внешняя оценка и (c) — внутренняя оценка.



Внешняя оценка множества значений интервального полинома одной переменной

Интервальный полином $\boldsymbol{f}(x) = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_1 x + \boldsymbol{a}_2 x^2 + \cdots + \boldsymbol{a}_n x^n$ можно ограничить вещественными функциями

$$f^l(x) = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{low}(\boldsymbol{a}_i, x, i) \qquad \text{и} \qquad f^u(x) = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{up}(\boldsymbol{a}_i, x, i),$$

где

$$\mathrm{low}(\boldsymbol{a}_i, x, i) = \begin{cases} \underline{\boldsymbol{a}}_i x^i, & \text{если } x \geq 0 \text{ или } i\text{-четное}, \\ \overline{\boldsymbol{a}}_i x^i, & \text{в противном случае}, \end{cases}$$

$$\mathrm{up}(\boldsymbol{a}_i, x, i) = \begin{cases} \overline{\boldsymbol{a}}_i x^i, & \text{если } x \geq 0 \text{ или } i\text{-четное}, \\ \underline{\boldsymbol{a}}_i x^i, & \text{в противном случае}. \end{cases}$$

Внешняя оценка множества значений полинома $\boldsymbol{f}(x)$ на $\boldsymbol{x}$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = [\ \underline{\boldsymbol{f}}^l(\boldsymbol{x}), \overline{\boldsymbol{f}}^u(\boldsymbol{x})\ ],$$

где $\boldsymbol{f}^l(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{f}^u(\boldsymbol{x})$ — интервальные расширения ограничивающих функций на $\boldsymbol{x}$, вычисленные с использованием схемы Горнера.

Вложенная форма представления интервального полинома n переменных

Представим интервальный полином

$$\boldsymbol{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k_1=0}^{K_1} \sum_{k_2=0}^{K_2} \ldots \sum_{k_n=0}^{K_n} \boldsymbol{a}_{k_1 k_2 \ldots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$$

в виде

$$\boldsymbol{q}(x_n) = \boldsymbol{q}_0 + \ldots + \boldsymbol{q}_{k_n} x_n^{k_n} + \ldots + \boldsymbol{q}_{K_n} x_n^{K_n},$$

где

$$\boldsymbol{q}_{k_n}(x_{n-1}) = \boldsymbol{q}_{k_n 0} + \ldots + \boldsymbol{q}_{k_n k_{n-1}} x_{n-1}^{k_{n-1}} + \ldots + \boldsymbol{q}_{k_n K_{n-1}} x_{n-1}^{K_{n-1}},$$

$$\boldsymbol{q}_{k_n k_{n-1}}(x_{n-2}) = \boldsymbol{q}_{k_n k_{n-1} 0} + \ldots + \boldsymbol{q}_{k_n k_{n-1} k_{n-2}} x_{n-2}^{k_{n-2}} + \ldots + \boldsymbol{q}_{k_n k_{n-1} K_{n-1}} x_{n-2}^{K_{n-2}},$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{q}_{k_n \ldots k_2}(x_1) = \boldsymbol{q}_{k_n \ldots k_2 0} + \ldots + \boldsymbol{q}_{k_n \ldots k_2 k_1} x_1^{k_1} + \ldots + \boldsymbol{q}_{k_n \ldots k_2 K_1} x_1^{K_1},$$

$$\boldsymbol{q}_{k_n \ldots k_2 k_1} = \boldsymbol{a}_{k_1 k_2 \ldots k_n}.$$

Внешняя оценка множества значений полинома на заданном брусе

1. Находим внешние оценки множеств значений полиномов $\boldsymbol{q}_{k_n\ldots k_2}(x_1)$ $(k_j = 0, \ldots, K_j$ и $j = 2, \ldots, n)$ на интервале $\boldsymbol{x}_1$. Для каждого из этих полиномов находим ограничивающие его вещественные полиномы $q^l_{k_n\ldots k_2}(x_1)$ и $q^u_{k_n\ldots k_2}(x_1)$ и вычисляем их интервальные расширения на $\boldsymbol{x}_1$. В качестве искомой внешней оценки берем

$$\boldsymbol{q}_{k_n\ldots k_2}(\boldsymbol{x}_1) = [\, \underline{\boldsymbol{q}}^l_{k_n\ldots k_2}(\boldsymbol{x}_1),\ \overline{\boldsymbol{q}}^u_{k_n\ldots k_2}(\boldsymbol{x}_1)].$$

2. Подставив найденные интервалы в качестве коэффициентов полиномов относительно переменной x_2, получаем интервальные полиномы $\boldsymbol{q}_{k_n\ldots k_3}(x_2)$ и аналогично пункту 1 вычисляем внешние оценки их множеств значений на $\boldsymbol{x}_2$.
3. Далее аналогично пункту 2 оцениваем множества значений интервальных полиномов относительно переменных $x_3, \ldots, x_n$ на интервалах $\boldsymbol{x}_3, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ соответственно. Внешняя оценка исходного интервального полинома $\boldsymbol{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на брусе $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)^\top$ есть

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}_n).$$

Интервальные корни интервального полинома одной переменной

Пусть интервальный полином $\boldsymbol{f}(x) = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{a}_i x^i$ ограничен вещественными полиномами $f^l(x)$ и $f^u(x)$ и существует число $\hat{x} \in \mathbb{R}$ такое, что $0 \in [\ f^l(\hat{x}), f^u(\hat{x})\ ]$.

Интервальный корень полинома $\boldsymbol{f}(x)$ определим как наибольший интервал $\boldsymbol{r}$, содержащий $\hat{x}$ и такой, что для любой точки $x \in \boldsymbol{r}$ имеет место включение

$$0 \in [\ f^l(x), f^u(x)\ ].$$

Интервальный корень $\boldsymbol{r}$ может быть

- конечным интервалом $[r_1, r_2]$, как вырожденным, так и невырожденным,
- полубесконечным интервалом $(-\infty, r_3]$ или $[r_4, +\infty)$,
- всей числовой осью.

Здесь $r_j \in \mathbb{R}, j = \overline{1,4}$.

Пусть $r_1 < \ldots < r_j < \ldots < r_k$ — различные корни полиномов $f^l(x)$ и $f^u(x)$, ограничивающих интервальный полином $\boldsymbol{f}(x)$. Рассмотрим интервалы $\boldsymbol{r}_1 = (-\infty, r_1], \ldots, \boldsymbol{r}_j = [r_{j-1}, r_j], \ldots, \boldsymbol{r}_{k+1} = [r_k, +\infty)$.

Невырожденный интервал $\boldsymbol{r}_j$, $j = 1, \ldots, k+1$, является интервальным корнем полинома $\boldsymbol{f}(x)$, если

$$0 \in [\ f^l(s), f^u(s)\ ],$$

где s принадлежит внутренности интервала $\boldsymbol{r}_j$.

Вырожденный интервал $[r_j, r_j]$, $j = 1, \ldots, k$, является интервальным корнем полинома $\boldsymbol{f}(x)$, если

$$0 \notin [\ f^l(s'), f^u(s')\ ] \quad \text{и} \quad 0 \notin [\ f^l(s''), f^u(s'')\ ],$$

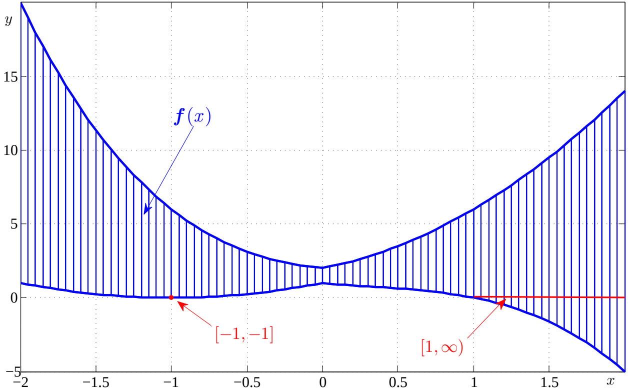
где s' и s'' принадлежат внутренностям интервалов $\boldsymbol{r}_j$ и $\boldsymbol{r}_{j+1}$ соответственно.

Пример 2

Рассмотрим интервальный полином

$$\boldsymbol{f}(x) = [-1,0]x^3 + [1,2]x^2 + [-1,2]x + [1,2].$$

На рисунке изображены графики функций, ограничивающих интервальный полином, а также его корни $[1,+\infty)$ и $[-1,-1]$.



Интервальный метод Ньютона

Пусть $X = x_1 \times \ldots \times x_n \in \mathbb{IR}^n$ брус, на котором будем искать решение системы $\mathbf{\Phi}(X, \boldsymbol{P}) = 0$. Итерационный метод Ньютона на основе наклонов определим следующим образом

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}^{(0)} := \boldsymbol{X}, \\ \boldsymbol{X}^{(k+1)} := \boldsymbol{X}^{(k)} \bigcap \mathcal{N}(X^{(k)}, \boldsymbol{X}^{(k)}, \boldsymbol{P}),\ k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Оператор Ньютона

$$\mathcal{N}(X^{(k)}, \boldsymbol{X}^{(k)}, \boldsymbol{P}) = X_0 + \mathit{Encl}\,(\boldsymbol{\Phi}^{\angle}(X^{(k)}, \boldsymbol{X}^{(k)}, \boldsymbol{P}), -\boldsymbol{\Phi}(X^{(k)}, \boldsymbol{P})).$$

Обозначения:

$X^{(k)}$ середина бруса $\boldsymbol{X}^{(k)}$;

$\boldsymbol{\Phi}^{\angle}(X^{(k)}, \boldsymbol{X}^{(k)}, \boldsymbol{P})$ интервальный многомерный наклон функции $\Phi(X, P)$ на брусе $\boldsymbol{X}^{(k)} \times \boldsymbol{P}$ относительно точки $X^{(k)}$;

$\mathit{Encl}\,(\boldsymbol{\Phi}^{\angle}(X^{(k)}, \boldsymbol{X}^{(k)}, \boldsymbol{P}), -\boldsymbol{\Phi}(X^{(k)}, \boldsymbol{P}))$ внешняя оценка множества решений интервальной линейной системы уравнений $\boldsymbol{\Phi}^{\angle}(X^{(k)}, \boldsymbol{X}^{(k)}, \boldsymbol{P})(X - X^{(k)}) = -\boldsymbol{\Phi}(X^{(k)}, \boldsymbol{P})$, полученная с помощью процедуры *Encl*.

Анализ совместности по брусу

Используя вложенную форму представления интервального полинома и алгоритм внешнего оценивания множества его значений, представим i–е $(i = \overline{1, n})$ уравнение $\boldsymbol{\varphi}_i(X, \boldsymbol{p}_i) = 0$ системы $\boldsymbol{\Phi}(X, \boldsymbol{P}) = 0$ в виде

$$\boldsymbol{q}_i(x_j) = 0, \qquad (\star)$$

где $\boldsymbol{q}_i(x_j) = \sum_{k_j=0}^{K_j} \boldsymbol{q}_{k_j} x_j^{k_j}$ — интервальный полином степени K_j относительно переменной x_j.

Вычислим интервальные корни $\boldsymbol{r}_1, \dots, \boldsymbol{r}_m$ уравнения $(\star)$ и найдём их пересечения с j-ой компонентой $\boldsymbol{x}_j$ исходного бруса $\boldsymbol{X}$. Пусть

$$W_j = \bigcup_{s=1}^{m} (\boldsymbol{r}_s \cap \boldsymbol{x}_j)\,.$$

Брус $\hat{\boldsymbol{X}} = (\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{j-1}, \square W_j, \boldsymbol{x}_{j-1}, \dots, \boldsymbol{x}_n)$, где $\square W_j$ — интервальная оболочка W_j, содержит множество решений системы $\boldsymbol{\Phi}(X, \boldsymbol{P}) = 0$ и в случае $\hat{\boldsymbol{X}} \subset \boldsymbol{X}$ является его более точной внешней оценкой.

Процедура дробления брусов

Шаг 1 Заносим брус $\boldsymbol{X}$ в список $\mathcal{L}$. Инициализируем пустой брус $\boldsymbol{V}$.

Шаг 2 Если $\mathcal{L}$ пуст, то переходим на шаг 4, в противном случае извлекаем из $\mathcal{L}$ первую запись, которую обозначим через $\boldsymbol{Y}$. Удаляем первую запись из $\mathcal{L}$. Если максимальная ширина компонент бруса $\boldsymbol{Y}$ меньше $\varepsilon > 0$, то $\boldsymbol{V} := \square\, \boldsymbol{V} \bigcup \boldsymbol{Y}$ и переходим на шаг 2.

Шаг 3 Применяем к $\boldsymbol{Y}$ процедуру сжатия, получаем брус $\boldsymbol{Z}$. Если $\boldsymbol{Z} = \varnothing$, то переходим на шаг 2. В противном случае дробим $\boldsymbol{Z}$ по компоненте, для которой максимальна величина

$$\operatorname{wid} \boldsymbol{z}_j \cdot \sum_{i=1}^{n} |\, \boldsymbol{\varphi}^{\angle}_{ij}(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{P}, \tilde{Z})\,|,$$

где $\tilde{Z} = \operatorname{mid} \boldsymbol{Z}$. Заносим полученные брусы $\boldsymbol{Z}'$ и $\boldsymbol{Z}''$ в список $\mathcal{L}$ и переходим на шаг 2.

Шаг 4 Принимаем $\boldsymbol{V}$ в качестве искомой внешней оценки и заканчиваем работу алгоритма.

Процедура сжатия бруса

Шаг 1 Выполняем проверку, содержит ли брус $\boldsymbol{Y}$ решения системы уравнений

$$\varphi_i(X, \boldsymbol{P}) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

- Используя вложенную форму представления и алгоритм внешнего оценивания множества значений интервального полинома находим интервальные расширения $\varphi_i(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{P})$ функций $\varphi_i(X, \boldsymbol{P})$ на брусе $\boldsymbol{Y}$.
- Если хотя бы один из интервалов $\varphi_i(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{P})$ не содержит 0, то брус $\boldsymbol{Y}$ может быть исключен из рассмотрения. В этом случае полагаем $\boldsymbol{Z} = \varnothing$ и переходим на шаг 3.

Шаг 2 К брусу $\boldsymbol{Y}$ применяем процедуру анализа совместности и многомерный интервальный метод Ньютона. Полученный в результате брус присваиваем $\boldsymbol{Z}$.

Шаг 3 Принимаем $\boldsymbol{Z}$ в качестве результата сжатия бруса $\boldsymbol{Y}$ и заканчиваем работу процедуры.

Внутренняя интервальная оценка множества решений системы интервальных полиномиальных уравнений

Этап 1 Пусть $X^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \in \boldsymbol{X}$, например, $X^* = \operatorname{mid} \boldsymbol{X}$. Находим для некоторого $k = 1, \ldots, n$ ближайший к точке X^* отрезок прямой, проходящей через эту точку параллельно k-ой оси координат и принадлежащий множеству $\Xi(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{P}) \bigcap \boldsymbol{X}$. Если ни одна из прямых, проходящих через точку X^* параллельно осям координат, не пересекает множество $\Xi(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{P}) \bigcap \boldsymbol{X}$, то необходимо выбрать другую точку X^*, например, найти некоторое приближение решения системы уравнений $\Xi(X, \operatorname{mid} \boldsymbol{P}) = 0$.

Этап 2 Пусть найденный отрезок имеет вид: $\underline{r} \le x_k \le \overline{r}$, $x_j = x_j^*$, где $j \ne k$. Интервал $[\underline{\boldsymbol{r}} + \varepsilon, \overline{\boldsymbol{r}} - \varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$, разбиваем на m непересекающихся подынтервалов $\boldsymbol{d}^{(s)}$, $s = \overline{1, m}$, одинаковой ширины, таких что $[\underline{\boldsymbol{r}} + \varepsilon, \overline{\boldsymbol{r}} - \varepsilon] = \bigcup_{s=1}^{m} \boldsymbol{d}^{(s)}$. Для каждого интервала $\boldsymbol{d}^{(s)}$ вычисляем брус $\boldsymbol{U}^{(s)}$, который является внутренней оценкой множества $\Xi(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{P}) \bigcap \boldsymbol{X}$.

Этап 1

Прямая, проходящая через точку $X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in \boldsymbol{X}$ параллельно k-ой оси координат описывается системой уравнений

$$x_j = x_j^*, \qquad j = 1, \dots, n,\ j \neq k \tag{$\star$}$$

Подставив $(\star)$ в систему $\boldsymbol{\varPhi}(X, \boldsymbol{P}) = 0$, получим систему полиномиальных уравнений относительно x_k

$$\boldsymbol{\varphi}_i(x_1^*, \dots, x_{k-1}^*, x_k, x_{k+1}^*, \dots, x_n^*, \boldsymbol{p}_i) = 0, \qquad i = 1, \dots, n. \tag{$\star\star$}$$

Если множество решений i-го уравнения системы $(\star\star)$ не пусто, вычисляем ближайший к x_k^* интервал $\boldsymbol{r}_i$, принадлежащий этому множеству и интервалу $\boldsymbol{x}_k$. В противном случае прямая $(\star)$ не пересекает $\varXi(\boldsymbol{\varPhi}, \boldsymbol{P}) \bigcap \boldsymbol{X}$.
Искомый отрезок задается соотношениями

$$\underline{\boldsymbol{r}} \leq x_k \leq \overline{\boldsymbol{r}}, \qquad x_j = x_j^*, \qquad j \neq k,$$

где $\boldsymbol{r} = \bigcup_{i=1}^n \boldsymbol{r}_i$.

Этап 2

1. Присваиваем k-ой компоненте $\boldsymbol{U}^{(s)}$ интервал $\boldsymbol{d}^{(s)}$, т.е. $\boldsymbol{u}_k^{(s)} := \boldsymbol{d}^{(s)}$.
2. Остальные компоненты $\boldsymbol{u}_j^{(s)}$, $j = \overline{1,n}$, $j \neq k$, находим следующим образом.
   Вычисляем отрезки прямых, проходящих через точки
   $$(x_1^*, \ldots, x_{k-1}^*, \underline{d}^{(s)}, x_{k+1}^*, \ldots, x_n^*) \text{ и } (x_1^*, \ldots, x_{k-1}^*, \overline{d}^{(s)}, x_{k+1}^*, \ldots, x_n^*)$$
   параллельно j-ой оси координат и принадлежащие множеству $\Xi(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{P}) \bigcap \boldsymbol{X}$.
   Пусть j-ая координата точек первого и второго отрезков удовлетворяет соответственно неравенствам
   $$t_1^l \leq x_j \leq t_1^u \quad \text{и} \quad t_2^l \leq x_j \leq t_2^u.$$
   Присваиваем
   $$\boldsymbol{u}_j^{(s)} := [\max\{\, t_1^l, t_2^l \,\}, \min\{\, t_1^u, t_2^u \,\}] \;.$$

Пример 3

Пусть $X = (x_1, x_2)^\top$ — вектор перемещений торца лопатки силовой установки, $C = (c_1, c_2)^\top$ — вектор цифровых кодов, значения которых с учётом погрешностей измерения задаются интервалами $\boldsymbol{c}_i = [\underline{c}_i, \overline{c}_i]$, $i = 1, 2$.

Вычисление перемещений торца лопатки, соответствующих вектору цифровых кодов $\boldsymbol{C}$, на основе градуировочных характеристик, имеющих вид интервальных полиномов

$$\boldsymbol{f}_i(x_1, x_2) = \sum_{k_1=0}^{2} \sum_{k_2=0}^{2} \boldsymbol{a}_{(i)k_1k_2} x_1^{k_1} x_2^{k_2}, \qquad i = 1, 2,$$

сводится к задаче оценивания множества решений системы интервальных полиномиальных уравнений

$$\boldsymbol{f}_i(x_1, x_2) = \boldsymbol{c}_i, \qquad i = 1, 2,$$

на заданном брусе $\boldsymbol{X}$.

Коэффициенты интервальных полиномов

$$
\begin{array}{lclllcl}
\boldsymbol{a}_{(1)00} & = & [2557.3632, 2567.3632] & & \boldsymbol{a}_{(2)00} & = & [3037.7782, 3053.7782] \\
a_{(1)01} & = & -221.0272 & & a_{(2)01} & = & -218.5782 \\
a_{(1)02} & = & 70.5782 & & a_{(2)02} & = & 80.1020 \\
a_{(1)10} & = & -297.6301 & & a_{(2)10} & = & 317.1479 \\
a_{(1)11} & = & 301.4891 & & a_{(2)11} & = & -342.3596 \\
a_{(1)12} & = & -93.0325 & & a_{(2)12} & = & 112.5637 \\
a_{(1)20} & = & 58.3290 & & a_{(2)20} & = & 30.1870 \\
a_{(1)21} & = & -88.8764 & & a_{(2)21} & = & 10.7886 \\
a_{(1)22} & = & 36.0065 & & a_{(2)22} & = & -19.9298
\end{array}
$$

Значения цифровых кодов

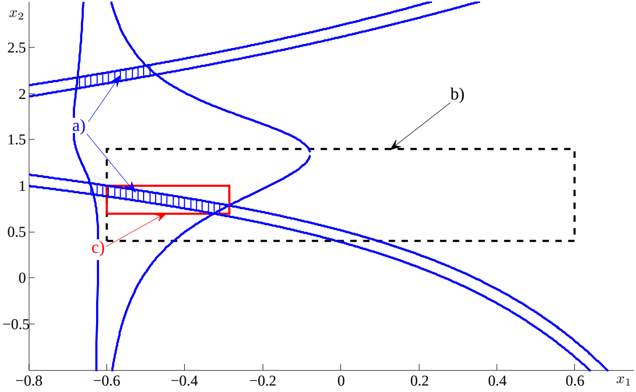
$$
\boldsymbol{c}_1 = [2472,\ 2482] \qquad \boldsymbol{c}_2 = [2868,\ 2884]
$$

Исходный брус был задан на основе физических соображений в виде $\boldsymbol{X} = ([-0.6, 0.6], [0.4, 1.4])^\top$.

Результаты внешнего оценивания

На рисунке изображены

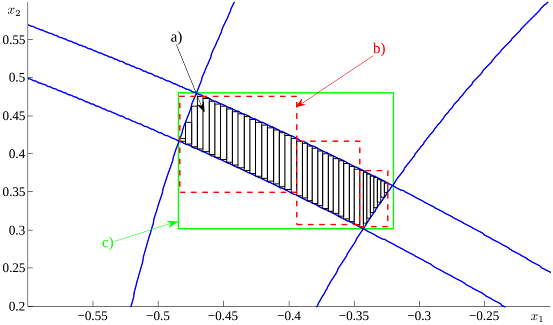
- a) множество решений системы интервальных полиномиальных уравнений,
- b) исходный брус $\boldsymbol{X}$,
- c) внешняя оценка $\boldsymbol{V} = [-0.6000, -0.2861] \times [0.6978, 1.0024]$.



Результаты внутреннего оценивания

На рисунке изображены

- (a) внутренние оценки,
- (b) интервальные оболочки внутренних оценок, полученных в результате трех итераций алгоритма:
  $\boldsymbol{U}_1 = [-0.4834, -0.3938] \times [0.3478, 0.4766]$,
  $\boldsymbol{U}_2 = [-0.3938, -0.3456] \times [0.3068, 0.4175]$,
  $\boldsymbol{U}_3 = [-0.3457, -0.3241] \times [0.3039, 0.3783]$,
- (c) интервальная оболочка множества решений на брусе $\boldsymbol{X}$.



Заключение

В работе предложен алгоритм получения внешней оценки множества решений системы интервальных полиномиальных уравнений, основанный на

- интервальном методе распространения ограничений,
- многомерном интервальном методе Ньютона,
- методах дробления решений.

Разработан и реализован алгоритм внутреннего оценивания множества решений системы интервальных полиномиальных уравнений. В целях наилучшего исчерпывания множества решений предлагается строить регулярное покрытие этого множества брусами.

Представлены результаты численных экспериментов.

Спасибо за внимание