ОБНАРЖЕНИЕ КРАТНОЙ РАЗЛАДКИ В ARCH-ПРОЦЕССАХ.

Н. М. Феропонтова

Национальный исследовательский Томский государственный университет

Введение

В настоящее время различные процессы и явления, происходящие в экономике, являются объектами анализа. И в большинстве своём эти процессы нестационарны и иногда их поведение достаточно сильно изменяется во времени.

Большое число известных процессов описываются параметрическими моделями. И в случае отсутствия изменений в последовательностях наблюдаемых данных методы построения адекватных моделей хорошо изучены.

Построение модели в интервале, содержащем изменение его свойств, приводит к ошибкам модели и как следствие к ошибкам при анализе и построении прогнозов. Поэтому очень важно выделять интервалы, на которых процесс ведет себя неизменно, называемые интервалами стационарности.

Целью данной работы является рассмотрение, реализация и выбор необходимых параметров для процедур обнаружения разладок в ARCH-процессах, которые описывают такие финансовые показатели как цены акций, биржевые индексы и другие. Рассматриваемые процедуры – это процедура BASTA, обнаружения кратной разладки, и процедура CUSUM для обнаружения одиночной разладки.

Таким образом поставленная задача – это обнаружение одиночной и кратной разладки в ARCH-процессах. Предполагается, что в неизвестный момент разлдки τ параметры модели изменяются скачкообразно, при том что влияние шумов, распределение которых неизвестно, остаётся неизменным. В случае кратной разладки, этих изменений несколько и моменты их наступления в поставленной задаче также неизвестны.

1. Описание модели.

Модель ARCH(p), описывающая процесс h_t, относится к числу нелинейных стохастических условно-гауссовских моделей в дискретном времени.

Согласно этой модели, величины h_t удовлетворяют уравнению:

$$h_t = \sigma_t \varepsilon_t, \qquad (1)$$

где «волатильность» σ_t представляет собой условную дисперсию, которая является линейной функцией квадратов прошлых возмущений, т.е.

$$\sigma_t^2 = {\alpha_0}^0 + \sum_{i=1}^{p} {\alpha_i}^0 h_{t-i}^2 ,$$

где $\varepsilon = \{\varepsilon_t\}_{t\geq 0}$ - последовательность независимых нормально распределенных случайных величин с математическим ожиданием $M\{\varepsilon_t\} = 0$ и дисперсией $D\{\varepsilon_t^2\} = 1$, а ${\alpha_0}^0, {\alpha_i}^0, i = 1 \dots p -$ параметры. Для обеспечения положительности условной дисперсии параметры должны удовлетворять следующим условиям $\alpha_0{}^0$>0 , $\alpha_i{}^0 \geq 0$, $i = 1 \dots p$, (p - порядок модели).

2. Метод трансформации и бинарной сегментации BASTA для обнаружения кратной разладки.

Постановка задачи. Рассматривается последовательность $(h_t)_{0 \leq t \leq T}$ наблюдений на промежутке $[0, T]$, удовлетворяющих ARCH(p)-модели, которая имеет N моментов изменения параметров («разладок») $\tau_i, i = 0, \dots, N$, таких, что $0 < \tau_1 < \cdots < \tau_N < T - 1$ ($\tau_0 = 0, \tau_{N+1} = T - 1$). В каждый из моментов разладки $\tau_i, i = 0, \dots, N$ вектор параметров $\{\alpha_j(\tau_i)\}_i$ модели изменяется скачком, т.е. $\alpha_j(\tau_i) \neq \alpha_j(\tau_i - 1)$. Предполагается, что количество разладок N, а также моменты их наступления τ_i заранее неизвестны. Задача состоит в том, чтобы оценить количество моментов разладки и их месторасположения.

При описании процедуры BASTA (Binary segmentation for transformed auto-regressive conditional heteroscedasticity) будем следовать работе Фрайзлевича и Субба Рао, опубликованной в 2013 году, [1] . Алгоритм включает в себя 2 этапа:

1) трансформация данных

2) бинарная сегментация.

На первом этапе осуществляется преобразование данных с помощью некоторой функции $g(\cdot)$ в последовательность $\mathrm{U_t}$:

$$\mathrm{U_t} = g(h_t, h_{t-1}, \dots, h_{t-T}).$$

Виды преобразующих функций $g(\cdot)$ делятся на 2 класса, в одном из которых используются остатки, а в другом – усреднение. Назовем алгоритм, применяющий остатки для построения преобразующей функции, BASTA-res, а алгоритм, использующий усреднение, BASTA-avg. Виды конкретных функций можно найти в [1]. Применение разных преобразований ведет к одной цели – уменьшению автокорреляции данных и снижению неоднородности дисперсии.

На втором этапе алгоритма BASTA выполняется бинарная сегментация преобразованной на первом этапе последовательности $\mathrm{U_t}$ с целью обнаружения точек «разладки». Метод бинарной сегментации, представляющий собой итерационную процедуру, реализует рекурсивный поиск кратной «разладки». Для этого вводится дополнительный параметр – пороговая константа, которая определяет момент остановки алгоритма.

Этап 1. Трансформация данных.

На первом этапе проводится выбор трансформирующей функции, на основе которой формируется последовательность $\mathrm{U_t} = g(\mathrm{h_t}, \mathrm{h_{t-1}}, \dots, \mathrm{h_{t-\tau}})$. Наиболее часто используется преобразование

$$U_t = \ln\left(\varepsilon + \frac{h_t^2}{\widehat{\alpha}_0 + \sum_{i=1}^{p} \widehat{\alpha}_i \; h_{t-1}^2 + \varepsilon h_t^2}\right),$$

где $\varepsilon = 0.001, \widehat{\alpha}_i -$ оценки параметров.

Этап 2. Бинарная сегментация

Второй этап представляет собой итерационную процедуру, исходные данные для которой – преобразованная на первом этапе последовательность $\mathrm{U_t}$, объем данных T, а также дополнительные параметры, задаваемые по умолчанию, и зависящие от выбора трансформирующей функции.

До начала работы алгоритма также необходимо определить значение пороговой константы $\tilde{b}_T$.

Алгоритм бинарной сегментации:

1. Задаются индексы $(j,l) = (1,1)$ и начальные значения $s_{j,l} = 0,\ u_{j,l} = T - 1$.
2. Положив $n = u_{j,l} - s_{j,l} + 1$ вычисляются следующие значения

$$\widetilde{U}^b_{s_{j,l},u_{j,l}} = \frac{\sqrt{u_{j,l} - b}}{\sqrt{n(b - s_{j,l} + 1)}} \sum_{t=s_{j,l}}^{b} \mathrm{U_t} - \frac{\sqrt{b - s_{j,l} + 1}}{\sqrt{n(u_{j,l} - b)}} \sum_{t=b+1}^{u_{j,l}} \mathrm{U_t}, \tag{2}$$

для всех $b \in (s_{j,l}, u_{j,l})$. И также на каждом интервале $(s_{j,l}, u_{j,l})$вычисляется момент «разладки» по формуле

$$b_{j,l} = \arg\max_b \left|\widetilde{U}^b_{s_{j,l},u_{j,l}}\right|.$$

3. Для заданной пороговой константы $\tilde{b}_T$ проверяется неравенство$\left|\widetilde{U}^b_{s_{j,l},u_{j,l}}\right| < \tilde{b}_T$, если оно выполняется, то закончить алгоритм на интервале $[s_{j,l}, u_{j,l}]$. Иначе фиксируется факт наличия разладки и момент $b_{j,l}$ добавляется к множеству найденных точек разладки (англ.change-points) и продолжается алгоритм:
   a) запомнить значения индексов $(j_0, l_0) = (j, l)$, далее изменить следующие значения: $(s_{j+1,2l-1}, u_{j+1,2l-1}) = (s_{j,l}, b_{j,l})$, $j = j + 1, l = 2l - 1$ и перейти на шаг 2.
   b) вернуть $(j,l) = (j_0, l_0)$, сохраненные в a) и изменив значения $(s_{j+1,2l}, u_{j+1,2l}) = (b_{j,l} + 1, u_{j,l})$, $j = j + 1, l = 2l$ перейти на шаг 2.

Этапы 3a) и 3b) описывают бинарную рекурсию влево и вправо от каждой обнаруженной «разладки», именно поэтому алгоритм носит название бинарной сегментации.

Полученные в результате работы алгоритма оценки N точек «разладки» и их месторасположений $\mathrm{b_{j,l}}$ располагаются в возрастающем порядке, т.е. мы получаем $\hat{\tau}_1 < \cdots < \hat{\tau}_N$. Пороговая константа $\tilde{\mathrm{b}}_\mathrm{T}$ определяет минимальные величины интервалов $[\mathrm{s_{j,l}}, \mathrm{u_{j,l}}]$.

3. Метод CUSUM обнаружения одиночной разладки.

Для решения задачи обнаружения одиночной разладки в ARCH-процессах рассмотрим последовательность T величин, удовлетворяющих (1). Предположим, что параметры процесса изменяются скачком в некоторый неизвестный момент времени τ^*, $0 < \tau^* < T$. Векторы параметров модели до и после разладки отличаются по крайней мере по одной координате. Согласно алгоритму CUSUM оценка $\hat{\tau}$ момента «разладки» τ^* определяется из уравнения:

$$\hat{\tau} = \min\left\{t : |H_t| = \max_{1 \le j \le T} H_j\right\}, \tag{3}$$

где

$$H_t = \frac{t(T-t)}{T^2}\left(\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t} h_j^2 - \frac{1}{T-t}\sum_{j=t+1}^{T} h_j^2\right). \tag{4}$$

Этот алгоритм дает приемлемое качество обнаружения моментов разладки в случае, если разладка произошла в средней части отрезка наблюдений, т.е. достаточно отдаленно от начала и конца выборки.

4. Численное моделирование.

На практике были рассмотрены 3 модели:

1. *ARCH(1)-модель без разладки с параметрами* $\alpha_0 = 0.091$, $\alpha_1 = 0.48$
2. *ARCH(1)-модель с одиночной разладкой в момент* $\tau = 941$.
   Параметры до и после разладки:
   $\alpha_0^{(0)} = 0.091$, $\alpha_1^{(0)} = 0.48$
   $\alpha_0^{(1)} = 0.055$, $\alpha_1^{(1)} = 0.33$
3. *ARCH(1)-модель с двумя разладками в моменты* $\tau_1 = 350$ *и* $\tau_2 = 735$.
   Параметры изменяются в моменты τ_1 *и* τ_2*:*
   $\alpha_0^{(0)} = 0.091$, $\alpha_1^{(0)} = 0.48$
   $\alpha_0^{(1)} = 0.055$, $\alpha_1^{(1)} = 0.21$
   $\alpha_0^{(2)} = 0.078$, $\alpha_1^{(2)} = 0.69$

Для реализации алгоритмов были построены оценки параметров этих моделей по методу максимального правдоподобия.

Результаты работы алгоритмов.

На этапе моделирования и исследования ARCH(1)-процессов с разладками и без разладок были получены следующие результаты ($\hat{\tau}^{(л)}$ − момент ложной тревоги):

$T = 1500$	разладки нет	$\tau = 941$	$\tau_1 = 350$, $\tau_2 = 735$
$BASTA$	$\hat{\tau}^{(л)} = 839$	$\hat{\tau}_B = 910$	$\hat{\tau}_B = 869$
$CUSUM$	$\hat{\tau}^{(л)} = 839$	$\hat{\tau}_C = 837$	$\hat{\tau}_C = 869$

Выводы:

1) Оценки моментов разладок по методу BASTA и CUSUM достаточно близки.
2) Обе процедуры работоспособны.
3) Процедура BASTA сложнее в реализации, однако не требует наличия априорной информации о числе разладок в ARCH(1)-процессе.
4) CUSUM более прост для реализации, однако рассчитан на обнаружения одиночной разладки.

5. Обнаружение моментов разладки в последовательности реальных данных – доходностей цен акций компании ОАО «Газпром» за период с 11.01.09 по 30.12.13.

Методом BASTA обнаружены 2 момента разладки, соответствующие датам 21 августа 2009 года и 20 декабря 2011 года (156 и 737 значения).

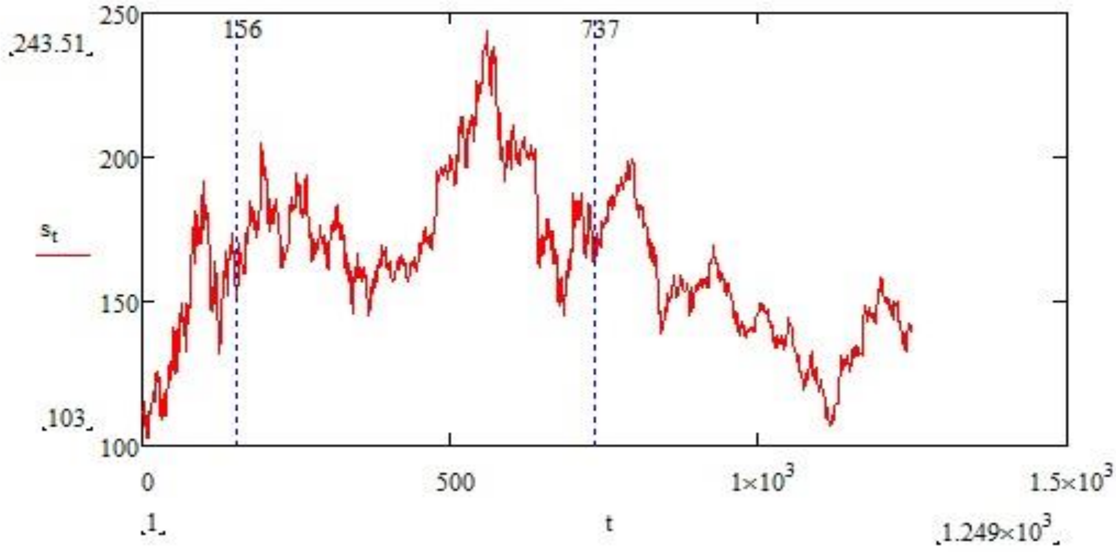


Рис. 1 График цен акций ОАО "Газпром" за период с 11.01.09 по 30.12.13, а также моментов разладок

Данные изменения можно заметить и на рисунке 2 с изображенными на нем доходностями и найденными моментами разладки.

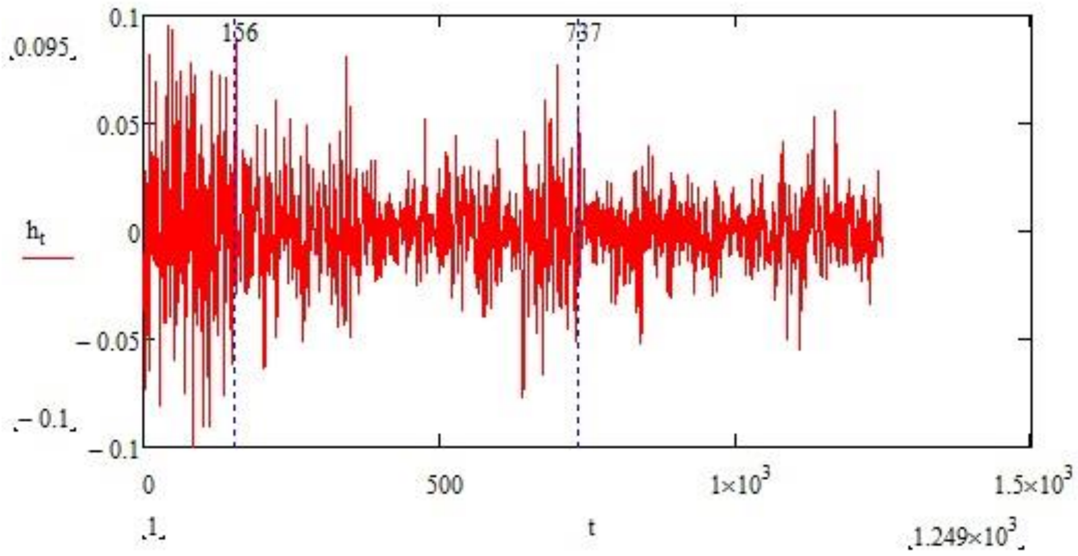
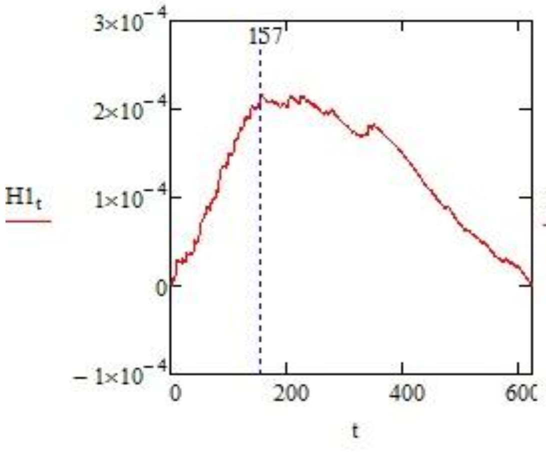


Рис.2. График цен акций ОАО "Газпром" за период с 11.01.09 по 30.12.13 а также моментов разладок.

Алгоритм CUSUM обнаружил также 2 момента разладки (156 и 737 значения), соответствующих датам 22 августа 2009 года и 20 декабря 2011 года. Но CUSUM-алгоритм – это изначально метод обнаружения одиночной разладки и, если мы разделим массив исходных данных на два равных, и для каждого отдельно проведем CUSUM-поиск разладки, то мы получим 2момента разладки, отличных от найденного ранее. Необходимо отметить, что эти оценки моментов разладок очень близки к оценкам, обнаруженным методом BASTA, а именно - это значения 157 и 737.



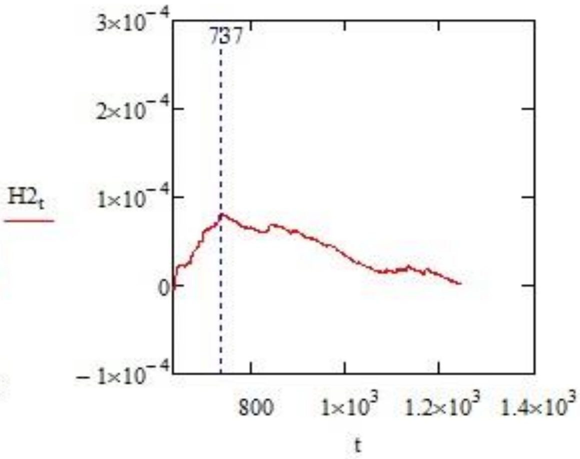


рис.3а. *рис.3б.*

На рисунках 3а и 3б изображены две последовательности вычисленных статистик H_t на интервалах $[0, T/2]$ и $[T/2, T]$соответственно.

Заметим, что разбиение на части исходного интервала не противоречит условиям алгоритма CUSUM

Выводы:

1. Оцененные моменты разладок совпали с периодами изменения в налоговом законодательстве для нефтегазового сектора экономики.
2. Один из этих периодов относится к началу августа 2009 года, когда были введены некоторые налоговые послабления во время кризиса 2008.
3. Вторая разладка связана с периодом 2011 года, когда эти льготы были отменены.

Список литературы:

1. Fryzlewicz P., S. Subba Rao / "BaSTA: consistent multiscale multiple change-point detection for ARCH processes"// Journal of the Royal Statistical Society, 2013. – 35с.
2. Kokoszka P ., R . Leipus / "Change-point estimation in ARCH models"// Bernoulli 6(3), 2000, p. 513-539.
3. Basseville M., Nikiforov I.V. Detection of abrupt changes theory and application: New Jersey: Prentice Hall in Information and System Sciences, 1993. – 469с.