

# Численное исследование линейной устойчивости микропленки электролита под действием электрического поля

Горбачева Е. В.\* Ганченко Г. С.†

12 октября 2014 г.

## Введение.

В данной работе рассматривается устойчивость микро и нано пленки электролита со свободной поверхностью раздела жидкость/газ под действием электрического поля. Поверхность раздела жидкость/газ предполагается заряженной, в то время как твердая поверхность может быть либо проводящей, либо заряженной диэлектрической поверхностью. Поверхностный заряд на границе жидкость/газ является мобильным [1]-[4] и может быть неустойчивым. Электростатическое притяжение создает избыток противоположных ионов в растворе электролита рядом с поверхностью твердого тела, тем самым образуя электрические Дебаевские слои. Приложенное тангенциальное электрическое поле, действующее на заряд в дебаевском слое создает кулоновские силы, которые передвигают жидкость.

## Постановка задачи.

Движение раствора электролита под действием внешнего электрического поля в микромасштабах описывается нелинейной системой уравнений: уравнением переноса положительных и отрицательных ионов  $C^\pm$ , уравнением Пуассона для электрического потенциала  $\Phi$  и уравнением Навье–Стокса в приближении для ползущего течения для компонент скорости  $\mathbf{u} = (U, V)$  и

давления  $P$ ,

$$\frac{\partial C^+}{\partial t} + \frac{\partial(UC^+)}{\partial x} + \frac{\partial(VC^+)}{\partial y} = \frac{\partial^2 C^+}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C^+}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( C^+ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( C^+ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial C^-}{\partial t} + \frac{\partial(UC^-)}{\partial x} + \frac{\partial(VC^-)}{\partial y} = \frac{\partial^2 C^-}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C^-}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( C^- \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( C^- \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right), \quad (2)$$

$$\nu^2 \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right\} = C^- C^+, \quad (3)$$

$$-\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\kappa}{\nu^2} (C^+ - C^-) \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (4)$$

$$-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\kappa}{\nu^2} (C^+ - C^-) \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0. \quad (6)$$

В качестве характерных величин выбраны:  $\tilde{h}_0$  — характерная длина, равная средней толщине пленки;

$\tilde{h}_0^2 / \tilde{D}$  — характерное время;

$\tilde{D} / \tilde{h}_0$  — характерная скорость;

$\tilde{\mu}$  — динамическая вязкость;

$\tilde{\mu} \tilde{D} / \tilde{h}_0^2$  — характерное давление;

$\tilde{\Phi}_0 = \tilde{R}\tilde{T} / \tilde{F}$  — термодинамический потенциал;

\*Горбачева Екатерина Витальевна, магистрант кафедры математического моделирования КубГУ

†Ганченко Георгий Сергеевич, аспирант кафедры вычислительной математики и информатики КубГУ

$\tilde{\sigma}_s = \tilde{\varepsilon}\tilde{\Phi}_0/\tilde{\lambda}_D$  — характеристика поверхностного заряда, где

$$\tilde{\lambda}_D = \left( \frac{\tilde{\varepsilon}\tilde{\Phi}_0}{\tilde{F}\tilde{C}_0} \right)^{1/2} = \left( \frac{\tilde{\varepsilon}\tilde{R}\tilde{T}}{\tilde{F}^2\tilde{C}_0} \right)^{1/2} \quad \text{— длина Дебая;}$$

$\tilde{C}_0$  — некоторая характерная массовая концентрация ионов.

Для двумерного случая можно ввести функцию тока  $\Psi$ :

$$U = \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \quad V = -\frac{\partial\Psi}{\partial x},$$

В этом случае из уравнений (4)-(5) может быть получено бигармоническое уравнение относительно  $\Psi$  с краевым условием:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4\Psi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\Psi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\Psi}{\partial y^4} = \\ = \frac{\varkappa}{\nu^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\rho = C^+ - C^-$  — плотность заряда.

На твердой поверхности, которая может быть либо заряженным диэлектриком, либо проводящей поверхностью, задаются условия непроницаемости ионов и условия прилипания и непроницаемости жидкости:

$$\begin{aligned} y = 0: \quad \Phi = 0 \quad \text{для проводника,} \\ \nu \frac{\partial\Phi}{\partial y} = q \quad \text{для заряженного диэлектрика,} \end{aligned} \quad (8)$$

$$C^+ \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial C^+}{\partial y} = 0, \quad -C^- \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial C^-}{\partial y} = 0, \quad (9)$$

$$V = 0, \quad U = 0. \quad (10)$$

На свободной границе раздела газ/жидкость также задаются условия непроницаемости ионов, условия равенства потенциала при переходе через границу, задается поверхностный заряд  $\sigma$ , условие сохранения мобильного заряда, условие отсутствия скачка для нормальной и тангенциальной компонент тензоров Максвелла-Вагнера и тензора гидродинамической напряженности. Кинематическое условие замыкает граничные условия на сво-

бодной поверхности:

$$\begin{aligned} y = h(x, t): \quad C^+ \frac{\partial\Phi}{\partial n} + \frac{\partial C^+}{\partial n} = 0, \\ -C^- \frac{\partial\Phi}{\partial n} + \frac{\partial C^-}{\partial n} = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\Phi = \varphi, \quad \nu \frac{\partial\Phi}{\partial n} = \delta\nu \frac{\partial\varphi}{\partial n} + \sigma, \quad (12)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \frac{\partial(U_s\sigma)}{\partial x} = 0, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{We}{r} + 2\frac{\partial U}{\partial x} \frac{1-h_x^2}{1+h_x^2} + 2\left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \frac{h_x}{1+h_x^2} - \\ - \frac{\varkappa}{2} \left( 1 - \frac{1}{\delta} \right) \left( \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right)^2 + \frac{\varkappa}{2} (1-\delta) \left( \frac{\partial\Phi}{\partial s} \right)^2 + \\ + P - \frac{\varkappa}{\delta\nu} \sigma \frac{\partial\Phi}{\partial n} + \frac{1}{2} \frac{\varkappa}{\delta\nu^2} \sigma^2 = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$4\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{h_x}{1+h_x^2} - \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \frac{1-h_x^2}{1+h_x^2} = \frac{\varkappa\sigma}{\nu} \frac{\partial\Phi}{\partial s}, \quad (15)$$

$$V = \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (16)$$

Электрический потенциал в газе описывается уравнением Лапласа:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0, \quad (17)$$

с краевым условием на верхней границе канала:

$$y = H: \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0. \quad (18)$$

Задача описывается семью безразмерными параметрами для проводящей стенки:

$$E_\infty = \frac{\tilde{E}_\infty \tilde{h}}{\tilde{\Phi}_0}, \quad \nu = \frac{\tilde{\lambda}_D}{\tilde{h}_0}, \quad \delta = \frac{\tilde{\varepsilon}_g}{\tilde{\varepsilon}}, \quad \varkappa = \frac{\tilde{\varepsilon}\tilde{\Phi}_0^2}{\tilde{\mu}\tilde{D}},$$

$$We = \frac{\tilde{\gamma}\tilde{h}_0}{\tilde{\varepsilon}\tilde{\Phi}_0^2}, \quad \sigma_0 = \frac{\tilde{\sigma}_0}{\tilde{\sigma}_s}, \quad H = \frac{\tilde{H}}{\tilde{h}_0},$$

и восемью параметрами:

$$E_\infty, \quad \nu, \quad \delta, \quad \varkappa, \quad We, \quad q = \frac{\tilde{q}}{\tilde{\sigma}_s}, \quad \sigma_0, \quad H,$$

для диэлектрической стенки, где  $E_\infty$  — напряженность внешнего электрического поля,  $\nu$  — число Дебая,  $\delta$  — коэффициент электрических проницаемостей в газе и жидкости,  $\varkappa$  — коэффициент связи между гидродинамикой и электростатикой,  $We$  — число Вебера и  $\sigma_0$  — невозмущенный поверхностный заряд для одномерного решения.

Тильдой обозначается размерная величина. Объемная концентрация водного электролита находится в пределах  $\tilde{C}_0 = 1 \div 10^3$  моль/м<sup>3</sup>; абсолютная температура  $\tilde{T} = 300$  К; коэффициент диффузии электролита составляет  $\tilde{D} = 10^{-9}$  м<sup>2</sup>/с. Толщина дебаевского слоя  $\tilde{\lambda}_D$  изменяется в диапазоне от 1 до 100 нм, в зависимости от концентрации  $\tilde{C}_0$ . Типичная плотность поверхностного заряда поверхности из стекла и кремния варьируется в пределах  $\tilde{q} = 10^{-4} - 10^{-3}$  Кл/м<sup>2</sup> соответственно, безразмерная плотность заряда  $q = 0.05 - 3$ . Параметр  $\varkappa$  характеризует физические свойства раствора электролита и варьируется для водных растворов в диапазоне от 0.1 — 0.5. С учетом вышеуказанных оценок, в наших расчетах приняты:  $\varkappa = 0.2$ ,  $\delta = \tilde{\varepsilon}_g/\tilde{\varepsilon} = 1/80$ ,  $q = -3$ ,  $\sigma_0 = 1$ , и  $H = 3$ . Для данной жидкости и электролитов число Вебера зависит только от одномерной толщины пленки, а именно, оно пропорционально  $\tilde{h}$ . При поверхностном натяжении воды  $\tilde{\gamma} = 7.28 \times 10^{-2}$  Н/м, мы получаем

$$We = \frac{1650}{\nu} \text{ для } \tilde{\lambda}_D = 10 \text{ нм}$$

и

$$We = \frac{8250}{\nu} \text{ для } \tilde{\lambda}_D = 50 \text{ нм.}$$

В большинстве расчетов  $\tilde{\lambda}_D = 10$  нм. В конце концов, проблема становится двухпараметрической, с внешним электрическим полем  $E_\infty$  и числом Дебая  $\nu$  как важнейшими параметрами. Число Дебая является малым параметром и он расположен при старшей производной в уравнении Пуассона, что приводит к образованию тонких слоев около границ и затрудняет численное решение системы.

### Одномерное решение.

При  $\frac{\partial}{\partial x} = 0$  из системы исчезает  $\Phi$  в чистом виде, а остается только  $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ , поэтому вводится напряжение

электрического поля  $E = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ . Одномерная система уравнений (1)-(18) имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c^+}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( c^+ E + \frac{\partial c^+}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial c^-}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( -c^- E + \frac{\partial c^-}{\partial y} \right), \\ \nu^2 \frac{\partial E}{\partial y} &= c^- - c^+, \end{aligned}$$

В начальный момент времени  $t = 0$  задано некоторое распределение концентраций положительных и отрицательных ионов:

$$t = 0: \quad c^+ = 1, \quad c^- = 1 + \nu(\sigma - q),$$

с граничными условиями:

$$\begin{aligned} y = 0: \quad \nu E &= q, \\ c^+ E + \frac{\partial c^+}{\partial y} &= 0, \quad c^- E - \frac{\partial c^-}{\partial y} = 0, \\ y = 1: \quad \nu E &= \sigma, \\ c^+ E + \frac{\partial c^+}{\partial y} &= 0, \quad c^- E - \frac{\partial c^-}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Эта система была решена численно с помощью  $\tau$ -метода Галёркина [5] по пространственной переменной  $y$  с многочленами Чебышёва в качестве полной системы функций. Многочлены Чебышева отличаются сгущением нулей около границ, поэтому они наилучшим образом подходят для аппроксимации решения в тонких Дебаевских слоях. По времени задача решалась методом Гира.

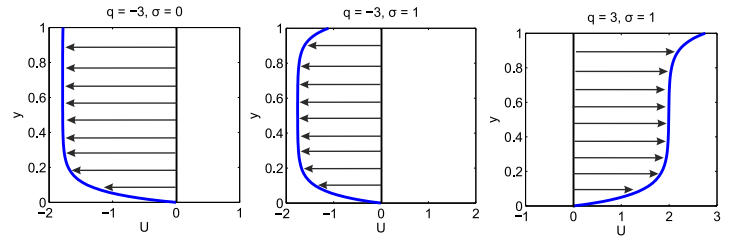


Рис. 1: График одномерной скорости  $U$  для различных значений зарядов  $q$  и  $\sigma$  для  $\nu = 0.1$

На рис. 1 изображен график стационарной скорости  $U$  при различных  $q$  и  $\sigma$ . Если у  $\sigma$  и  $q$  одинаковый знак, то поверхности противоположно заряжены, если различный, то одинаково. Наличие малого параметра  $\nu$  при старших производных приводит к образованию пограничных слоев, в которых решение резко меняет своё поведение.

### Линейная устойчивость. Численное решение.

Для численного решения задачи линейной устойчивости вводится криволинейная система координат:

$$\begin{aligned} \tau = t, \quad \xi = x, \quad \eta = \frac{y}{h(x, t)}, \\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} - \eta \frac{h_t}{h} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \eta \frac{h_x}{h} \frac{\partial}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial \eta}. \end{aligned}$$

Производные по нормальному  $n$  и тангенциальному  $s$  направлениям на поверхности  $y = h(x, t)$  (или  $\eta = 1$ ) имеют следующий вид,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} = -\frac{h_x}{\sqrt{1+h_x^2}} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\sqrt{1+h_x^2}}{h} \frac{\partial}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}} \frac{\partial}{\partial \xi}. \end{aligned}$$

Рассматриваются небольшие синусоидальные возмущения, с волновым числом  $\alpha$ , наложенные на одномерное, стационарное решение,

$$K = K_0 + \hat{K}(\eta) \exp(i\alpha\xi + \lambda\tau),$$

$$\begin{aligned} c^\pm = c_0^\pm + \hat{c}^\pm(\eta) \exp(i\alpha\xi + \lambda\tau), \\ \rho = \rho_0(\eta) + \hat{\rho}(\eta) \exp(i\alpha\xi + \lambda\tau), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \Phi = \Phi_0(\eta) + \hat{\Phi}(\eta) \exp(i\alpha\xi + \lambda\tau), \\ \Psi = \Psi_0(\eta) + \hat{\Psi}(\eta) \exp(i\alpha\xi + \lambda\tau), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} U = U_0 + \hat{u}(\eta) \exp(i\alpha\xi + \lambda\tau), \\ V = \hat{v}(\eta) \exp(i\alpha\xi + \lambda\tau). \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} h = 1 + \hat{h} \exp(i\alpha\xi + \lambda\tau), \\ \sigma = \sigma_0 + \hat{\sigma} \exp(i\alpha\xi + \lambda\tau). \end{aligned} \quad (22)$$

Дальше индекс "0", обозначающий одномерное решение, будет опускаться и одномерным решением будет обозначаться просто функция без "^".

Подставив эти выражения в систему (1)-(18) и отбросив слагаемые более высокого порядка, получается дифференциальная задача на собственные значения, где параметр  $\lambda$  выбирается таким образом, чтобы система имела не тривиальное решение. Система линеаризованных уравнений, удобных для численного интегрирования, представлена ниже:

$$\begin{aligned} \lambda \hat{K} - \lambda K' \eta \hat{h} + i\alpha U \hat{K} - i\alpha K' \hat{\Psi} + i\alpha E_\infty \hat{\rho} = \\ = \frac{d}{d\eta} (\rho \hat{\Phi}' + E \hat{\rho} + \hat{K}') - \alpha^2 \rho \hat{\Phi} - \alpha^2 \hat{K} + \\ + \left[ \alpha^2 \eta \cdot (\rho E + K') - 2 \frac{d}{d\eta} (\rho E + K') \right] \hat{h} + \\ + [i\alpha E_\infty \eta \rho'] \hat{h}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \lambda \hat{\rho} - \lambda \rho' \eta \hat{h} + i\alpha U \hat{\rho} - i\alpha \rho' \hat{\Psi} + i\alpha E_\infty \hat{K} = \\ = \frac{d}{d\eta} (K \hat{\Phi}' + E \hat{K} + \hat{\rho}') - \alpha^2 K \hat{\Phi} - \alpha^2 \hat{\rho} + \\ + \left[ \alpha^2 \eta \cdot (KE + \rho') - 2 \frac{d}{d\eta} (KE + \rho') \right] \hat{h} + \\ + [i\alpha E_\infty \eta K'] \hat{h}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\hat{\Phi}'' - \alpha^2 \hat{\Phi} + \frac{\hat{\rho}}{\nu^2} = (2E' - \alpha^2 E \eta) \hat{h},$$

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}^{IV} - 2\alpha^2 \hat{\Psi}'' + \alpha^4 \hat{\Psi} + (-4U''' + 2\alpha^2 U'' \eta) \hat{h} + \\ + (4\alpha^2 U' - \alpha U \eta) \hat{h} = \\ = \frac{\kappa}{\nu^2} \left[ i\alpha (\rho' \hat{\Phi} - E \hat{\rho}) - E_\infty \hat{\rho}' + E_\infty \rho' \hat{h} \right], \end{aligned} \quad (25)$$

$\eta = 0$  :

$$\nu \hat{K}' + q\hat{\rho} + \nu\rho\hat{\Phi}' = 0, \quad \nu\hat{\rho}' + q\hat{K} + \nu K\hat{\Phi}' = 0,$$

$$\hat{\Phi} = 0, \text{ для проводника}$$

$$\nu\hat{\Phi}' = q\hat{h}, \text{ для диэлектрика}$$

$$\hat{\Psi} = 0, \quad \hat{\Psi}' + U\hat{h} = 0,$$

$\eta = 1$  :

$$\hat{K}' + E\hat{\rho} + \rho\left(i\alpha E_\infty\hat{h} + \hat{\Phi}'\right) = 0,$$

$$\hat{\rho}' + E\hat{K} + K\left(i\alpha E_\infty\hat{h} + \hat{\Phi}'\right) = 0,$$

$$\nu[\hat{\Phi}' + i\alpha E_\infty(1-\delta)\hat{h} + \alpha\delta \tanh(\alpha H) \cdot \hat{\Phi}] = \hat{\sigma} + \hat{\sigma}h,$$

$$\lambda\hat{\sigma} + i\alpha U\hat{\sigma} + i\alpha\sigma\hat{\Psi}' - i\alpha\sigma U\hat{h} = 0,$$

$$\begin{aligned} &\hat{\Psi}''' - 3\alpha^2\hat{\Psi}' + (3\alpha^2U + \alpha^2U' - U'')\hat{h} - \\ &- i\alpha^3We\hat{h} + \varkappa\left(i\alpha\left[E'\hat{\Phi} - E\hat{\Phi}' + E^2\hat{h}\right] - \right. \\ &\left. - \varkappa\left(E_\infty\hat{\Phi}'' + (2-\delta)\alpha^2E_\infty\hat{\Phi}\right)\right) = 0, \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\hat{\Psi}'' + \alpha^2\hat{\Psi} - \alpha^2U\hat{h} = \\ &= -\frac{\varkappa}{\nu}\left(i\alpha\sigma\hat{\Phi} - E_\infty\hat{\sigma} - 2\sigma E_\infty\hat{h}\right), \end{aligned}$$

$$\lambda\hat{h} + i\alpha\hat{\Psi} = 0.$$

В граничное условие (5) уже подставлено  $\varphi$ , как решение уравнения Лапласа (17). С помощью  $\tau$ -метода Галёркина с функциями Чебышёва [6] в качестве базиса, задача сводится к алгебраической задаче на собственные значения

$$\det(A + \lambda B) = 0,$$

которая решалась QR-алгоритмом.

## Результаты.

*Случай проводящей поверхности.* Результаты расчетов показали, что для случая проводящей поверхности существует четыре моды, связанные с четырьмя эффектами: искажения свободной поверхности  $\hat{h}$ , смещения поверхностного заряда  $\hat{\sigma}$ , суммарной неравномерностью концентрации ионов в

диэлектрике  $\int_0^1 (\hat{K}) d\eta$  и неоднородности плотности заряда  $\int_0^1 (\hat{\rho}) d\eta$ . Все эти механизмы сцеплены, поэтому все моды влияют друг на друга.

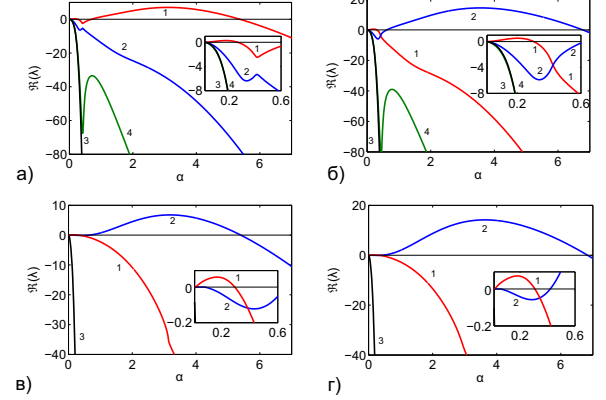


Рис. 2: Зависимость действительной части  $\lambda$  от волнового числа  $\alpha$  для диэлектрической поверхности: (а)  $E_\infty = 85$ , (б)  $E_\infty = 100$ ; для диэлектрической поверхности: (в)  $E_\infty = 85$ , (г)  $E_\infty = 100$ ;  $\nu = 0.02$ .

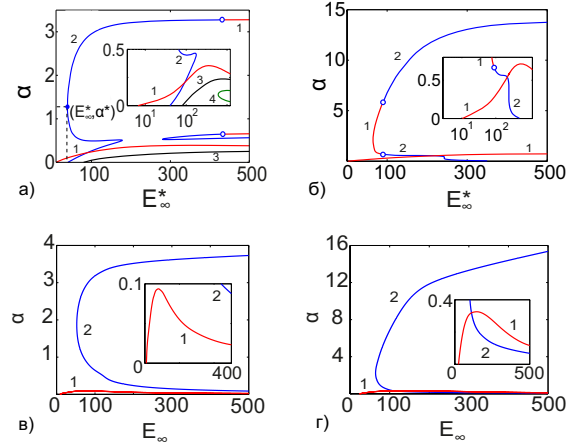


Рис. 3: Кривые нейтральной устойчивости для проводящей поверхности  $\nu = 0.1$  (а),  $\nu = 0.02$  (б); для диэлектрической поверхности  $\nu = 0.1$  (в),  $\nu = 0.02$  (г).

Зависимость действительной части спектра от волнового числа  $\alpha$  представлена на рис.2(а)(б). Моды 1, 2 и 3 неустойчивы в длинноволновой области. Мода 4 становится неустойчивой в коротковолновом диапазоне только при очень больших значениях  $E_\infty$  рис.3(а). При небольших значениях  $E_\infty$  мода 1 имеет так же коротковолновую неустойчивость. При увеличении  $E_\infty$  происходит бифуркация и моды 1 и 2 меняются между собой рис.2(а), рис.2(б) и в этой области неустойчивой становится мода 2.

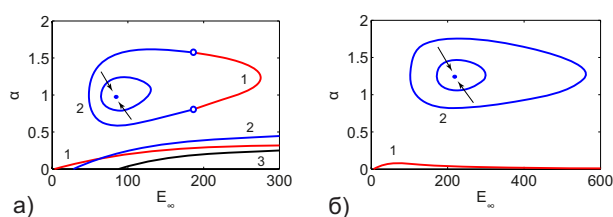


Рис. 4: Кривые нейтральной устойчивости для (а) проводящей поверхности  $\nu = 0.13 - 0.15$ , (б) диэлектрической  $\nu = 0.15 - 0.17$ .

При достаточно больших значениях  $\nu$  коротковолновая неустойчивость исчезает и остается только длинноволновая рис.5(а). При уменьшении числа Дебая система в целом стабилизируется, проходя через минимум рис.5(а).

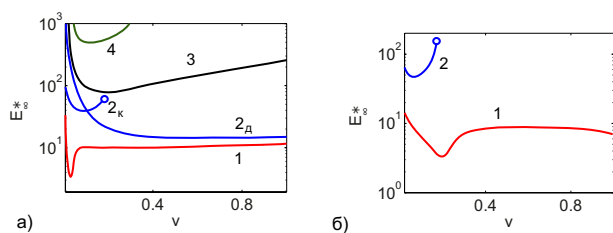


Рис. 5: Критические значения  $E_\infty^*$  для (а) проводящей поверхности, (б) диэлектрической заряженной поверхности. 2 — коротковолновая неустойчивость, 2 — длинноволновая неустойчивость.

*Случай диэлектрической заряженной поверхности.* Этот случай отличается от предыдущего

в основном только тем, что остается только три моды. Это объясняется фактом, что условие наличия фиксированного заряда  $q$  на твердой поверхности уничтожает одну степень свободы и неоднородность пространственного заряда  $\int_0^1 (\hat{\rho}) d\eta$  оказывается зависимой от остальных факторов через уравнение Пуассона. Кроме того, в отличие от предыдущего случая, не происходит бифуркация между модами 1 и 2 рис.2(в)(г). Таким образом, мода 1 имеет длинноволновую неустойчивость, а мода 2 — коротковолновую, при этом мода 3 всегда устойчива. В остальном поведение системы с заряженной диэлектрической стенкой совпадает со случаем проводящей поверхности рис.3(в)(г), рис.4(б), рис.5(б).

## Заключение.

В данной работе были представлены результаты изучения линейной устойчивости микро- и нанопленок жидкости с газовой границей во внешнем касательном электрическом поле. Численный анализ предоставляет много новых важных результатов и для проводящей, и для диэлектрической поверхностей: было обнаружено присутствие коротковолновой неустойчивости, возникающие и исчезающие области неустойчивости, бифуркации и т.д. Также было рассмотрено влияние чисел Дебая и других параметров на длинноволновую и коротковолновую устойчивость.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ №№ 14-08-31260-мол\_а, 14-08-00789-а.*

## Список литературы

- [1] GRACIAA A., MOREL G., SAULNER P., LACHAISE J., AND SCHECHER R. S.  $\zeta$ -POTENTIAL IN GAS BUBBLES // J. COLLOID INTERFACE SCI. 2005, № 172, p.131.
- [2] YANG C., DABROS T., LI D., CZARNECKI J., AND MASLIYANJ. H. MEASUREMENT OF THE  $\zeta$ -POTENTIAL OF GAS BUBBLES IN AQUEOUS SOLUTIONS BY MICROELECTROPHORESIS METHOD // J. COLLOID INTERFACE SCI. 2001, № 243, p.128.

- [3] TAKAHASHI M.,  $\zeta$  - POTENTIAL OF MICROBUBBLES IN AQUEOUS SOLUTIONS: ELECTRICAL PROPERTIES OF THE GAS-WATER INTERFACE// J. PHYS. CHEM. B. 2005, № 09, p.21858.
- [4] CHOI W., SHARMA A., QIAN S., LIM G., AND JOO S. W. ON STEADY TWO-FLUID ELECTROSMOTIC FLOW WITH FULL INTERFACIAL ELECTROSTATICS// J. COLLOID INTERFACE SCI. 2011, № 357, p.521.
- [5] BOYD J.P. CHEBYSHEV AND FOURIER SPECTRAL METHODS. NEW YORK: DOVER PUBLICATIONS, 2001.
- [6] CHANG H.-C., YOSSIFON G., AND DEMEKHIN E. A. NANOSCALE ELECTROKINETICS AND MICROVORTICES: HOW MICROHYDRODYNAMICS AFFECTS NANOFLUIDIC ION FLUX// ANNU. REV. FLUID MECH. 2012, № 44, p.401.