

Использование сингулярного разложения в регуляризирующем алгоритме решения СЛАУ

Чубатов А.А.

Рассмотрим приближенную плохообусловленную ($cond(A) \gg 1$) переопределенную СЛАУ

$$A \cdot x = b, \|A - \bar{A}\| \leq h, \|b - \bar{b}\| \leq \delta, \quad (1)$$

где A, b — приближенные и \bar{A}, \bar{b} — точные данные, h, δ — погрешности матрицы и правой части.

Данная задача относится к классу некорректных по Адамару. Решение системы (1) будем искать в обобщенном смысле: в виде регуляризованного по А. Н. Тихонову псевдорешения

$$(A^T \cdot A + \alpha \cdot E) \cdot x_\alpha = A^T \cdot b, \quad (2)$$

где x_α — регуляризованное решение.

Существует два пути выбора регуляризирующего параметра α : априорный и апостериорный [1]. Апостериорный выбор параметра α носит итерационный характер, что приводит к необходимости многократно решать систему (2). Решение таких систем можно ускорить, если выполнить сингулярное разложение матрицы A

$$A = U \cdot S \cdot V^T,$$

где $S = diag(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N)$ — диагональная матрица сингулярных чисел $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_N \geq 0$, U, V — унитарные матрицы.

Хотя, процедура сингулярного разложения является трудоемкой задачей, но это разложение делается один раз. В результате регуляризованная система (2) примет диагональный вид

$$(S^T \cdot S + \alpha \cdot E) \cdot V^T \cdot x_\alpha = S^T \cdot U^T \cdot b,$$

что дает существенный выигрыш в скорости решения на каждой итерации.

Сингулярное разложение с успехом можно использовать и при решении расширенных нормальных систем (РНС) [2]

$$\begin{pmatrix} E & A \\ A^T & O \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix},$$

где E и O — единичная и нулевая матрицы, $r = b - A \cdot x$ — невязка.

В этом случае, применяя SVD разложение и регуляризацию, получим систему

$$(R^2 + \alpha \cdot E) \cdot K \cdot \begin{pmatrix} r_\alpha \\ x_\alpha \end{pmatrix} = R \cdot K \cdot \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} E & S \\ S^T & O \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} U^T & 0 \\ 0 & V^T \end{pmatrix},$$

которая имеет три ненулевые диагонали и допускает разбиение на независимые подсистемы порядка 2, что делает ее решение элементарным.

Список литературы

- [1] Морозов В. А. Алгоритмические основы методов решения некорректных задач // Вычисл. методы и программирование. — 2003. — Т. 45. С. 130–141.
- [2] Жданов А. И. Регуляризация неустойчивых конечномерных линейных задач на основе расширенных систем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2005. — Т. 45, № 11. С. 1918–1926.