

Об одной математической модели роста клеточных популяций

ХАЦИМОВА БЭЛА ВЛАДИМИРОВНА

Институт прикладной математики и автоматизации (Нальчик), Россия

e-mail: hacimova@list.ru

Рассмотрим уравнение Фоккера - Планка

$$\frac{\partial w}{\partial t} + x \frac{\partial w}{\partial y} = D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < r, \quad 0 < y < 1, \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} = u_1, \quad (2)$$

$$w|_{x=r} = u_0, \quad (3)$$

$$w(x, 0, t) = pw(x, 1, t), \quad (4)$$

Пусть $w = w(x, y, t)$ характеризует рост числа клеток как функция времени t , x - скорость созревания, y - степень созревания клетки; $D > 0$ - коэффициент диффузии, $u_0, u_1 \geq 0$ - заданные константы [1]. Впервые использовать уравнение (1) при построении моделей роста клеточных популяций предложил М. Ротенберг в 1983 году.

Независимые от времени t решения $u = u(x, y)$ уравнения (1) удовлетворяют уравнению

$$x \frac{\partial u}{\partial y} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < r, \quad 0 < y < 1 \quad (5)$$

и, в силу (2)-(4), условиям

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = u_1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (6)$$

$$u|_{x=r} = u_0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (7)$$

$$u(x, 0) = pu(x, 1), \quad 0 \leq x \leq r. \quad (8)$$

Уравнение (5) заменой $\tau = Dy$ сводится к уравнению

$$x \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad 0 < x < r, \quad 0 < \tau < D, \quad (9)$$

с условиями

$$\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} = v_1, \quad 0 \leq \tau \leq D, \quad (10)$$

$$v|_{x=r} = v_0, \quad 0 \leq \tau \leq D, \quad (11)$$

$$v(x, 0) = pv(x, 1), \quad 0 \leq x \leq r, \quad (12)$$

где $v(x, \tau) = u(x, \frac{\tau}{D})$, $v_1 = u_1$, $v_0 = u_0$.

Автомодельные решения уравнения (9) найдем методом Фурье. Получим два уравнения

$$Y' - \lambda Y = 0, \quad (13)$$

$$X'' - \lambda x X = 0, \quad (14)$$

с условиями

$$X'(0) = v_1, X(r) = v_0, \quad (15)$$

$$Y(0) = pY(1). \quad (16)$$

где $\lambda = \text{const}$.

Учитывая (16), отличное от нуля решение уравнения (13) находим в виде

$$Y(\tau) = Ce^{\lambda\tau}, \quad \lambda = -\ln p, \quad (17)$$

где C - произвольная постоянная.

Пусть $p = 1/e$, тогда уравнение (14) имеет вид

$$X'' - xX = 0. \quad (18)$$

Решение уравнения (18) представимо в виде

$$X(x) = C_1 Ai(x) + C_2 Bi(x), \quad (19)$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные, $Ai(x)$ и $Bi(x)$ - функции Эйри.

Удовлетворяя решение (19) условиям (15), получим систему

$$C_1 Ai'(0) + C_2 Bi'(0) = v_1, \quad (20)$$

$$C_1 Ai(r) + C_2 Bi(r) = v_0. \quad (21)$$

В силу принципа экстремума решение задачи (15) для уравнения (18) единственно. Определитель системы (20), (21) отличен от нуля. Определив постоянные C_1 и C_2 однозначным образом из этой системы, находим $X(x)$. Тогда решение задачи (10)-(12) для уравнения (9) определится формулой $v(x, \tau) = X(x)Y(\tau)$, а решение задачи (6)-(8) для уравнения (5) - формулой $u(x, y) = v(x, Dy)$.

Список литературы

- [1] НАХУШЕВ А. М.. Уравнение математической биологии . М.: Высш.шк., 1995. — 301 с.