

## АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

*Дмитриева Татьяна Львовна, доктор технических наук, профессор*

*Нгуен ВанТы, аспирант*

*Национальный исследовательский Иркутский государственный  
технический университет, г. Иркутск*

*Рассмотрена постановка задачи оптимального проектирования железобетонной рамы в форме задачи нелинейного математического программирования. Приведено решение этой задачи с использованием программы РОСКЖБ.*

**Ключевые слова:** *расчетная схема сооружения, оптимальное проектирование, железобетонная рама, нелинейное математическое программирование, метод конечных элементов, модификация функции Лагранжа.*

Постановку задачи оптимизации примем в форме задачи нелинейного математического программирования (НМП):

$$\text{найти} \quad \min f(x, P(x)), \quad x \in E^{nx} \quad (1)$$

$$\text{при ограничениях} \quad g_j(x, P(x)) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad (2)$$

$$x_i^L \leq x_i \leq x_i^U, \quad i = 1, 2, \dots, nx. \quad (3)$$

Здесь  $\{X\}$  – вектор варьируемых параметров на интервале  $\{X^L\} - \{X^U\}$ . Функции ограничений  $g_j$  связаны с варьируемыми параметрами  $x$  через параметры состояния  $P(x)$ :

$$\{P(x)\} = \varphi(\delta, M, Q, N, \sigma), \quad (4)$$

куда могут входить узловые перемещения ( $\delta$ ), внутренние силовые факторы ( $M, Q, N$ ), напряжения ( $\sigma$ ) и т.д., определяемые решением уравнения метода конечных элементов в линейной постановке.

Рассмотрим случай оптимизации железобетонной статически неопределимой рамы, когда расчётные усилия меняются в зависимости от соотношения параметров сечений. Будем варьировать геометрическими параметрами сечений с учетом армирования.

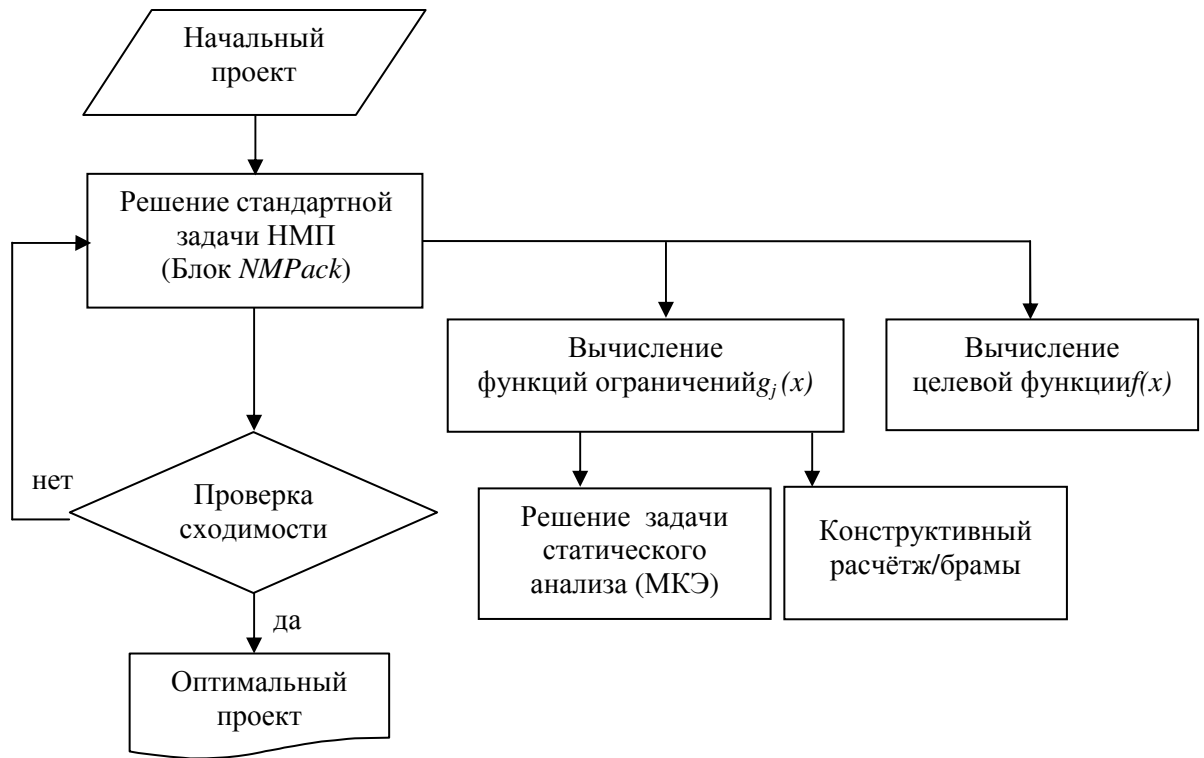
В качестве критерия оптимальности будем рассматривать минимум приведенного объема железобетонной рамы. Поэтому целевая функция  $f(x)$  определяется по формуле:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n (A_i + \alpha A_{si} + \alpha' A'_{si}) L_i; \quad (5)$$

где  $n$  - число элемента,  $A_i, L_i$  - площадь сечения и длина  $i$ -го элемента,  $A_{si}, A'_{si}$  - площадь сечения арматуры  $i$ -го элемента в растянутой зоне и сжатой зоне,  $\alpha = E_s / E_b$  - коэффициент приведения арматуры к бетону для растянутой зоне,  $\alpha' = E'_s / E_b$  - коэффициент приведения арматуры к бетону для сжатой зоне.

## Алгоритм решения задачи оптимизации рамы

Приведем блок-схема алгоритма задачи оптимизации.



**Рис.1. Блок-схема алгоритма оптимального проектирования железобетонной рамы**

Рассмотрим алгоритм решения задачи нелинейного математического программирования, реализованный в блоке *NMPack*. Условно-экстремальная задача (1-3) приводится к задаче на безусловный экстремум с использованием функции Лагранжа  $F_L$ , а также её модификации - функции  $F_P$  [4,5].

Функцию Лагранжа для задачи (1-3) запишем в виде [2]:

$$F_L = f(x) + \{Y\}^T [\Lambda] \{g\}, \quad (6)$$

где  $\{Y\}$  – вектор двойственных переменных (или множителей Лагранжа);  $[\Lambda]$  – диагональная матрица булевых переменных,  $\Lambda_{jj} = 1$ , если  $j \in M_{ПА}$ , в противном случае  $\Lambda_{jj} = 0$ , где  $M_{ПА}$  – множество потенциально активных ограничений. Пассивные ограничения, принимаются равными нулю, поэтому поиск вектора  $\{Y\}$  осуществляется в редуцированном пространстве потенциально активных ограничений.

Модифицированная функция Лагранжа  $F_P$  принята в следующем виде [1]:

$$F_P = k_f F_L + 0,5 \{g\}^T [\Lambda] [k] \{g\} + 0,5 k_f \{Y\}^T (\Lambda - [I]) \{\Delta Z\}, \quad (7)$$

где  $k_f$  – нормирующий множитель, введенный для повышения устойчивости вычислений;  $\Delta Z$  – величина сдвига ограничений,  $[k]$  – диагональная матрица штрафных коэффициентов;

$[I]$  – единичная матрица. Элементы матрицы  $[\Lambda]$  определяются из условия:  
если  $g_{j+\Delta} Z_j > 0$ , то  $\Lambda_{jj} = 1$ , иначе  $\Lambda_{jj} = 0$ . (8)

Алгоритм решения задачи (1-3), оперирующий с функцией  $F_p$ , включает в себя на каждой итерации попеременно две основных процедуры: определение вектора прямых переменных  $\{X^{t+1}\}$  и определение вектора двойственных переменных  $\{Y^{t+1}\}$ .

Оптимальный проект соответствует условию стационарности этой функции по переменным  $X$  и  $Y$ :

$$\max_Y \min_X F_p(X, Y). \quad (9)$$

Критерием окончания итерационного процесса являются проверки

$$|X^{t+1} - X^t| \leq \varepsilon_x |X^t|, \quad |\bar{g}| \leq \varepsilon_g, \quad (10)$$

где  $|\bar{g}|$  – множество потенциально активных ограничений;  $\varepsilon_x, \varepsilon_g$  – заданная точность вычислений;  $t$  – номер итерации [2]. Кроме того, установлено предельное число итераций решения задачи (9) и максимальное число обращений к целевой функции и функциям ограничений.

Железобетонная рама рассчитывается по первой группе предельных состояний, поэтому будем использовать линейную КЭ модель [3].

$$[K]\{\delta\} = \{F\} \quad (11)$$

Здесь  $[K]$  матрица жесткости системы,  $\{F\}$  – вектор внешней нагрузки,  $\{\delta\}$  – вектор узловых перемещений стержневой системы.

### Пример оптимизации железобетонной рамы.

Алгоритм, приведенный на рис. 1 был автоматизирован. На его основе разработан программный комплекс **РОСКжб** (Расчет и оптимизация строительных ж/б конструкций) [9]. Проиллюстрируем работу этого ПК на примере оптимального проектирования плоской рамы, показанной на рис. 2. В соответствии с нормами СП 63.13330.2012 "Бетонные и железобетонные конструкции" (п. 5.1.2) примем исходные данные, перечисленные в таблице 1. В скобках дается ссылка на таблицы, приведенные в вышеуказанных нормах.

Таблица 1

### Исходные данные

Наименование		Количества		ед. изм.
		Тип эл. 1	Тип эл. 2	
Расчетное сопротивление сжатию (табл. 6.8)	$R_b$	0,85	0,85	кН/см <sup>2</sup>
Нормативное сопротивление сжатию (табл. 6.7)	$R_{b,ser}$	1,1	1,1	кН/см <sup>2</sup>
Нормативное сопротивление растяжению (таб. 6.7)	$R_{bt,ser}$	0,11	0,11	кН/см <sup>2</sup>
Начальный модуль упругости (табл. 6.11)	$E_b$	2400	2400	кН/см <sup>2</sup>
Защитный слой арматуры	$a$	3,0	3,0	см
Арматуры в растянутой зоне класса А 400	$d$	2,0	2,0	см
Площадь сечения арматуры 3 Ø 20 А400	$A_s$	9,42	9,42	см <sup>2</sup>

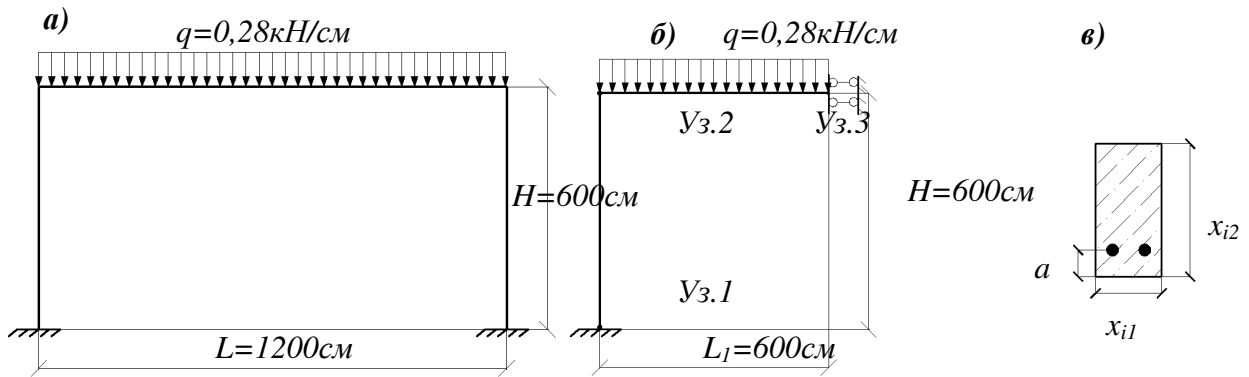


Рис.2. а) Оптимизируемая рама; б) расчетная схема; в) сечение в элементе  $i$ .

Так как оптимизируемая рама – симметричная конструкция, учтем в расчетной схеме половину рамы (рис. 2,б).

Целевая функция  $f(x)$  представляет собой приведенный объем железобетонной рамы плоского каркаса до образования трещин [7, 8];

$$f(x) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n_e} (A_i + \alpha A_{si}) L_i = 2 \cdot \sum_{i=1}^2 (x_{i1} x_{i2} + \frac{E_s}{E_b} A_{si}) L_i; \quad (12)$$

Функции ограничений  $g_j(x)$  связаны с варьируемыми параметрами  $x$  через параметры состояния  $M_i$  (изгибающие моменты) и  $\delta$  (узловые перемещения), которые определяются решением задачи конечно-элементного анализа(11).

Имеет место 2 вида ограничений.

#### а) Ограничение на напряжения в элементах

Из схемы рамы следует, что максимальные изгибающие моменты находятся в крайних сечениях каждого элемента. Эти моменты вычислены без учета образования трещин [7]. Тогда ограничения на напряжения в каждом элементе рамы будет иметь вид:

$$g_j = \frac{M_i}{W_{pl} R_{bt,ser}} - 1 \leq 0, \quad j = 1,2...4; i = 1,2 \quad (13)$$

$W_{pl}$  - момент сопротивления в крайних волокнах сечения рамы.

#### б) На перемещения узла 3

$$g_5 = \frac{\delta_3}{[\delta]} - 1 \leq 0; \quad (14)$$

Предельное значение перемещения было принято  $[\delta]=4,8$  см, что составляло  $L/25$ .

Начальные значения ширины всех элементов:  $B_0 = 40$  см (варьируемый параметр).

Диапазон варьирования:  $B_{min} = 30$  см;  $B_{max} = 80$  см.

Начальные значения высоты всех элементов:  $H_0 = 50$  см (варьируемый параметр)

Диапазон варьирования:  $H_{min} = 40$  см;  $H_{max} = 120$  см.

### Результаты оптимизации в программе РОСКжб.

Значение целевой функции $f(x)$	5342089,1 $см^3$
Число обращений к целевой функции ( $N_{funfx}$ )	2715
Число итераций	6

### Значения оптимальных параметров

Элемент 1			Элемент 2		
$B$ (см)	$H$ (см)	$As$ ( $см^2$ )	$B$ (см)	$H$ (см)	$As$ ( $см^2$ )
47,1794	50,6468	9,42	30,0001	63,5105	9,42

Были получены следующие потенциально активные ограничения по нормальным напряжениям  $g_2 = -0,9400 \cdot 10^{-4}$ ,  $g_3 = 0,7800 \cdot 10^{-5}$ ,  $g_4 = 0,7800 \cdot 10^{-5}$ .

Точность полученных результатов можно оценить по невязкам ограничений  $g_3$  и  $g_4$ , которая превышает допустимое значение на 0,00078%.

### Исследование оптимального решения на единственность

Для проверки полученного решения на единственность в качестве начального проекта использовались различные величины ширины ( $B_0$ ) и высоты ( $H_0$ ) сечения. Результаты 5-ти решений приведены в табл. 2.

Таблица 2

№ варианта	Начальные значения ( $см^3$ )		Оптимальные значения (см)				Значение целевой функции $F(x)_{opt}$ ( $см^3$ )	$g(x)$
			Элемент 1		Элемент 2			
	$B_0$	$H_0$	$B_{opt}$	$H_{opt}$	$B_{opt}$	$H_{opt}$		
1	40	50	47,1794	50,6468	30,0001	63,5105	5342089,1	0,0000078
2	50	60	47,1780	50,6452	30,0000	63,5107	5341921,5	0,0000021
3	50	70	47,1781	50,6454	30,0000	63,5108	5341942,9	0,000011
4	60	80	47,1782	50,6455	30,0000	63,5111	5341959,0	0,000015
5	70	70	47,1780	50,6453	30,0000	63,5107	5341927,1	0,0000056

С различных начальных значений мы получили значения целевой функции, которые практически совпадают (разброс в значениях 0,003%).

Округлим оптимальные значения с учетом рекомендаций [6]. Полученные при этом результаты приведены на табл. 3.

Таблица 3

	Значения оптимальных параметров			Округление значений решения задачи		
	$B$ (см)	$H$ (см)	$As$ ( $см^2$ )	$B$ (см)	$H$ (см)	$As$ ( $см^2$ )
Тип эл. 1	47,1794	50,6468	9,42	45,00	50,00	9,42
Тип эл. 2	30,0001	63,5105	9,42	30,00	65,00	9,42

Скорректируем значение целевой функции и значения ограничений с учетом округления варьируемых параметров:  $f(x) = 5228328 \text{ см}^3$ ,

$$g_1 = -0,48, \quad g_2 = 1,1 \cdot 10^{-2}, \quad g_3 = -7,9 \cdot 10^{-2}, \quad g_4 = -1,1 \cdot 10^{-2}, \quad g_5 = -0,128.$$

При этом максимальное значение потенциально активного ограничения по нормальным напряжениям ( $g_2$ ) не выходит за пределы значений, допустимых при проектировании строительных конструкций (как правило, в пределах 3-х процентов), поэтому скорректированное решение может быть принято как оптимальное.

### **Основные выводы**

1. Решение тестовой задачи оптимизации железобетонной рамы показало эффективность разработанного алгоритма оптимального проектирования, дающего оптимальный результат на малом числе итераций.

2. Тестирование алгоритма оптимизации путем использования различных начальных точек подтвердило единственность полученных результатов при достаточно высокой скорости сходимости.

3. Принятая модель вычислительного алгоритма оптимального проектирования железобетонных рам обеспечивает независимую работу основных её блоков, что позволяет дополнять каждый блок (например, расширять список проверок в конструктивном расчете железобетонных конструкций).

### **Библиографический список**

1. Дмитриева Т.Л., Безделев В.В. Использование многометодной стратегии оптимизации в проектировании строительных конструкций. Известия вузов. Строительство, № 2, 2010, С. 90-95.
2. Дмитриева Т.Л. Параметрическая оптимизация в проектировании конструкций, подверженных статическому и динамическому воздействию: монография. Иркутск: Изд-во ИрГТУ, 2010. 176с.
3. Дмитриева Т.Л. Методика и алгоритмы решения задач строительной механики с использованием программных средств. Часть 1. Расчет плоских рам в программе MATCAD. Вестник Иркутского государственного технического университета, 2013, № 11 (82). С. 153-160.
4. Бертсекас Д. Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. М.: Радио и связь, 1987. 400 с.
5. Гольштейн Е.Г., Третьяков Н.В. Модифицированные функции Лагранжа и методы оптимизации. М.: Наука, 1989. 400 с.
6. ГОСТ 25628-90 "Колонны железобетонные для одноэтажных зданий".
7. СП 63.13330.2012 "Бетонные и железобетонные конструкции"
8. Свидетельство № 2014617917 от 06.08.2014 о государственной регистрации программы для ЭВМ «Программа оптимального проектирования железобетонной балки». Авторы: Дмитриева Т.Л., Нгуен Ван Ты.