

0.1. Григорьев А.Е. Мультипольная модификация метода граничных элементов для моделирования течений Стокса

В представленной работе методом граничных элементов (МГЭ) [1], модифицированном на основе метода быстрых мультиполей, решается смешанная краевая задача для системы уравнений Стокса:

$$\begin{cases} \mu \Delta \mathbf{u} = \nabla p, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, & \text{в } V \\ \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}, & \text{на } S_u, \\ \mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}}, & \text{на } S_t, \end{cases} \quad (1)$$

где V — область с криволинейной границей $\partial V = \mathbf{S} = S_u \cup S_t$, \mathbf{u} — неизвестный вектор скорости, черта сверху означает известное значение. Величина вектора напряжений \mathbf{t} задается, как $t_i = \sigma_{ij} n_j$, где σ_{ij} — тензор вязких напряжений; n_j — компоненты внешней единичной нормали к \mathbf{S} ; p — давление; μ — динамическая вязкость.

Особенностью предложенной модификации МГЭ [2] является возможность нахождения неизвестных значений функции на границе и внутри области, без непосредственного формирования матрицы СЛАУ задачи (1) в памяти компьютера. А именно, с использованием быстрого метода мультиполей, формируется приближенное произведение матрицы на любой произвольный вектор, и, применяя для решения СЛАУ метод обобщенных минимальных невязок (GMRES), с каждой новой итерацией данное произведение приближается к искомому решению системы уравнений с необходимой точностью. Это позволяет значительно уменьшить необходимый объем памяти в сравнении с классическим МГЭ и ускорить время вычисления.

Ускорение процесса решения достигается построением квадродерева из групп граничных элементов (мультиполей), где взаимодействие при решении между отдельными элементами на границе S подменяется на взаимодействие между отдельными мультиполями квадродерева. Точность найденного решения при этом отличается лишь на доли процента от решения, найденного МГЭ.

Этот метод позволяет решать задачи с десятками тысяч узлов на границе при использовании персонального компьютера, что является недоступным для классического МГЭ. Эти особенности мультипольного подхода позволяют получить оценку времени вычисления $O(N)$, где N — число узлов.

Проведены расчеты обтекания цилиндра в плоском канале при малых числах Рейнольдса.

[2] LIU Y.J. A new fast multipole boundary element method for solving 2-D Stokes flow problems based on a dual BIE formulation // Engineering Analysis with Boundary Elements. — 2008. — Vol. 32, N 3, P. 139–151.

Список литературы

[1] POZRIKIDIS C. Boundary integral and singularity methods for linearized viscous flow / N.Y.: Cambridge university press, 1992. — 259 p.